Operele lui Spiru C. Haret

Spiru C. Haret

Operele lui Spiru C. Haret

Ediție îngrijită și note de Constantin Schifirneț

Volumul X
Operele științifice

1878–1912

comunicare.ro

Redactor: Lucian Pricop
Coperta: Cristian Lupeanu
Tehnoredactor: Olga Machin

SNSPA, Facultatea de Comunicare și Relații Publice
Strada Povernei 6, București
Tel./fax: 021 313 58 95
E-mail: editura@comunicare.ro
www.comunicare.ro
www.editura.comunicare.ro

Editat cu sprijinul Autorității Naționale pentru Cercetare Științifică.
Tiraj: 1000 de exemplare.
Preț de vânzare al unui exemplar (mai puțin adaosul comercial): 107 lei (vol. VII–XII).

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
HARET C., SPIRU
Operele lui Spiru C. Haret / Haret C. Spiru; pref.: Remus Pricopie, Constantin Schifirneț. Ed. a 2-a, rev. – București: Comunicare.ro, 2010
11 vol.
ISBN 978-973-711-206-4
Vol. X: Operele științifice: 1878–1912. – Bibliogr.
ISBN 978-973-711-217-0

I. Pricopie, Remus (pref.)
II. Schifirneț, Constantin (pref.)

821.135.1-821
821.135.1

NOTĂ REDACȚIONALĂ

Volumul de față reprezintă retipărirea anastatică a textelor din volumul X, *Operele științifice. 1878–1912*, al seriei *Operele lui Spiru C. Haret*, *Publicate de Comitetul pentru ridicarea monumentului său*, cu o *Introducere* de G. Țițeica, Secretarul General al Academiei Române, la Editura „Cartea Românească“, București, [s.a.].

Am completat volumul cu o nouă traducere în limba română a studiului tipărit inițial în franceză *Mécanique sociale*, cea mai importantă contribuție a lui Spiru Haret la științele socioumane, pe care am plasat-o în secțiunea „Anexă – *Mecanica socială*“, la paginile 539–680.

Am ales soluția reproducerii textului din ediția Adamescu, având în vedere dificultățile de prelucrare tipografică a textelor de matematică, fizică, inginerie, astronomie, economie ale lui Spiru Haret, dar și din condescendență editorială față de cei care au îngrijit din punct de vedere științific lucrările academice ale savantului român. La stabilirea textelor, anexelor și notelor volumului, tipărit probabil în 1938, au colaborat: acad. G. Țițeica, prof. Miron Nicolescu, prof. Nic. Coculescu, prof. Dionisie Germani, prof. Andrei Ioachimescu, prof. C. Stătescu. Fără îndoială, întreprinderea noastră de recuperare se legitimează și grație informațiilor oferite cu acribie de cei pe care i-am enumerat, cărora li s-a adăugat profesorul și editorul Constantin Schifirneț, care, cu exigență savantă, a redactat note pentru 187 de personalități, noțiuni, expresii a căror relevanță peste timp poate scăpa cititorului de azi. Notele inițiale ale cărții sunt numerotate independent la subsolul fiecărei pagini, în text cifra fiind însoțită de o paranteză. În cazul notelor profesorului Schifirneț – încercând să fim consecvenți în raport cu celelalte zece volume ale seriei – am pus notele între două paranteze și se regăsesc la finalul cărții, la paginile 681-693.

Revenind asupra cuprinsului cărții, sunt de precizat câteva borne inconturnabile în lectura acestui volum:

Sur l’invariabilité des grandes axes des orbites planétaires. 1878,

Despre măsura capacității buților. 1878,

Cercetări asupra părții financiare a proiectului de răscumpărare a căilor ferate. 1880, *Despre accelerațiunea seculară a mișcării medii a Lunii. 1880*,

Moriscă cu indicațiuni electrice, indicator electric și sistemul de suspensiune al moriscei – pentru a măsura iuțeala unui curent lichid într-un punct oarecare. 1882,

Considerațiuni relative la studiul experimental al mișcării apei în canale descoperite și la constituțiunea intimă a fluidelor. 1883,

Adaos la relațiunea dlui N. Coculescu despre observarea eclipsei totale de Soare de la 4 aprilie. 1893,

Teorema ariilor în mișcarea sistemelor materiale. 1894,

Notă asupra poporațiunii României. 1903,

Raport despre cartea „Contribuții la munca pentru ridicarea poporului" de Sp. Popescu, prezentată la Academie pentru premiu. 1905,

Mécanique sociale. 1910,

Despre mecanica socială. 1911,

Meteorul de la 29 noiembrie 1911,

Raport despre aeroplanul Vlaicu, prezentat Academiei pentru premiu. 1912,

Pata cea mare roșie de pe planeta Jupiter. 1912,

Henri Poincaré. 1912.

Cele 17 studii incluse în volum, arondate preocupărilor academice ale lui Spiru Haret, sunt organizate cronologic, din 1878 până în 1912, de la teza de doctorat până la *Comunicarea la Academia Română în ședința din 9 noiembrie 1912* asupra operei lui Henri Poincaré. Maniera în care se succed între 1878–1894, cu o distanță de 1-3 ani, și respectiv 1903–1912, cu o variație de 1-5 ani, probează implicarea constantă a lui Spiru Haret în cercetarea științifică.

Noua traducere a *Mécanique sociale* se justifică prin necesitatea actualizării terminologice, dar, mai ales, prin senescența pe care o suferă unele texte (cu precădere traduceri) publicate în anii '60 ai secolului trecut. Prima traducere aparține Adinei Gabriela Apostol și a apărut în 1969, la Editura Științifică, cu un studiu introductiv și note de Leon Țopa. Aceeași traducere, cu puține intervenții, a fost retipărită în 2001, la Editura 100+1 Gramar, studiul introductiv fiind semnat de Constantin Schifirneț.

Prezența între paginile volumului de față a textului original tipărit la Paris în 1910 (Gauthier-Villars și Bucharest: Carol Göbl, I. St. Rasidescu; S-sor Imprimeur) și a traducerii noastre finalizate în 2010 (*coincidentia apostolorum!*) favorizează o lectură multiplă.

De asemenea, erorile de tipar ale ediției Adamescu, precum și elementele specifice ortografiei limbii române de la începutul secolului XX nu au fost eliminate, intervenția noastră pe text riscând să falsifice statutul anastatic al ediției.

Lucian Pricop

PRECUVÂNTARE

Volumul al X-lea cuprinde operele de știință ale lui Spiru Haret. Am făcut o alegere din cele tipărite de dânsul, lăsând la o parte traducerile și cărțile didactice. Am adăugat, însă, trei scrieri inedite, alegând din numeroasele manuscrise pe care familia ni le-a pus la dispoziție pe acestea care se înfățișau ca lucrări definitive. Lipsesc numai – cum se va vedea – câteva desene și tablouri grafice care nu s-au găsit.

Publicarea acestui volum este rodul unei largi colaborări.

În primul rând trebuie să mulțumim d-nei *Ana Haret*, pentru bunăvoința cu care ne-a pus la dispoziție bogatul material din care am putut face alegerea; apoi dlui *Mihai Haret*, nepotul marelui Ministru, care a strâns cu răbdare și sârguință recenziunile și scrisorile din care s-a putut alcătui notița introductivă la *Mécanique Sociale*.

Afară de comisiunea special însărcinată cu adunarea, orânduirea și darea la tipar a lucrărilor lui Spiru Haret, s-a făcut apel și la alte persoane:

Dl *G. Țițeica*, profesor la Facultatea de Științe din București, urmașul lui Haret în locul de membru al Academiei Române, ne-a ajutat să alegem, din numeroasele manuscrise rămase de la Haret, pe acele care formau lucrări încheiate. Tot d-sa a binevoit a se însărcina cu scrierea introducerii la acest volum.

Dl *Miron Nicolescu*, profesor de geometria analitică la Facultatea de Științe din Cernăuți, cu un adevărat devotament, s-a oferit să facă corectura lucrărilor de pură specialitate, cu competența d-sale de matematician;

Dl *Nic. Coculescu*, profesor la Facultatea de Științe din București, a dat indicațiunile bibliografice necesare pentru notița istorică privitoare la Teza de doctorat;

Dl *Dionisie Germani*, profesor de hidraulică la Școala politehnică din București, a studiat „Morișca“ și ne-a sfătuit să publicăm această operă postumă;

Dl *Andrei Ioachimescu*, profesor de mecanică generală la Școala politehnică din București, ne-a ajutat la alegerea și orânduirea materialului introductiv pentru *Mécanique Sociale*.

Dl *C. Stătescu*, directorul general al Serviciului de Măsuri și Greutăți, ne-a dat informațiunile cerute de noi, necesare pentru introducerea la chestiunea măsurării capacității buților.

Mulțumim cu recunoștință tuturor pentru bunăvoința cu care ne-au ajutat.

Comitetul

INTRODUCERE

Volumul de față cuprinde lucrările științifice ale lui Spiru Haret. Se potrivește de minune apariția acestui volum odată cu încheierea a 25 de ani de la moartea acestui mare român, în același timp om de știință și om de stat. Judecata noastră e mai sigură astăzi, când sentimentele în privința lui au căpătat forma definitivă.

Citind aceste pagini științifice, care par reci, regăsesc în ele pe Haret așa cum l-am cunoscut, care și el părea rece.

Simplu în expunere, limpede și cristalin, mergând drept la ideea fundamentală, arătându-i întreaga însemnătate, fără să ocolească greutățile întâmpinate, pe care le atacă cu toată vigoarea și le învinge.

Parcă-l văd făcând cursul de Mecanică, în anul 1894–1895, în sala mică a Facultății de Științe din vechiul local. Nu se poate lecție mai curgătoare și mai sigură.

Așa se înfățișează și lucrările din acest volum, dintre care unele au mai fost tipărite, altele au fost găsite în manuscris. E același stil, aceeași cugetare, aceeași preocupare de a spune neted și lămurit ideea, ca să fie cât mai bine și mai deplin înțeleasă.

Dl Adamescu, cu o grijă care merită toată recunoștința, a arătat la fiecare lucrare informațiile esențiale care o privesc. În special, a căutat să pună cât mai bine în lumină însemnătatea științifică a tezei de doctorat.

Problema tratată și rezultatul căpătat a produs în lumea științifică de pretutindeni o deosebită impresie. Puține teze de doctorat au fost primite așa de favorabil și au fost înscrise așa de repede în analele științei, ca teza lui Haret.

Și acum vin la partea tragică a vieții științifice a lui Spiru Haret, pe care am căutat s-o deslușesc, acum 23 de ani, în cuvântarea mea de recepție la Academia Română. S-o spun și aici în câteva cuvinte, care vor lămuri toate lucrările din acest volum.

Pe vremea când și-a trecut Haret teza de doctorat, *Mecanica cerească*, în care se specializase el, se găsea în grea criză, din care n-a putut ieși decât introducând în metodele ei de cercetare rezultatele noi, fine și pătrunzătoare la care ajunsese Analiza matematică. Metodele clasice pe care le stăpânea Haret nu mai erau potrivite spre a urmări și căpăta rezultate noi din ce în ce mai înalte. Haret n-a mai putut lucra în specialitatea sa.

Se vede din volumul de față încercările, aş putea zice sforțările, interesante făcute de el spre a-și deschide câmpuri noi în care să-și întrebuințeze și cunoștințele și pătrunderea. Toate au fost și au rămas dibuiri răzlețe, care nu puteau duce departe. Cotitul vaselor, curgerea apei în canale, în care Haret a desfășurat fără îndoială spirit creator, nu puteau duce la o lucrare de însemnătatea universală și înaltă a tezei de doctorat.

Dintre toate lucrările cuprinse în acest volum, singura lucrare, care prin proporțiile și însemnătatea ei stă cu cinste alături de teza de doctorat, e fără îndoială *Mecanica socială*.

Scrisă cu avânt şi cu convingerea adâncă de a fi reuşit să îmbine în ea cele două preocupări ale vieţii sale, ştiinţifică şi politică. ,*Mecanica socială* a lui Haret, cu toate rezervele ce se pot face în privinţa metodei întrebuinţate, e o lucrare de o deosebită valoare.

Astfel, volumul de faţă e o dovadă că, deşi Haret a fost prins în viaţa politică, plină şi istovitoare, el n-a încetat de a se ocupa de ştiinţă, el n-a încetat de a fi până la capăt om de ştiinţă.

Din acest punct de vedere viaţa lui Haret, aşa de simplă, aşa de plină şi aşa de curată, este, mai ales pentru tineret, o admirabilă învăţătură.

G. Ţiţeica
Secretarul general al Academiei Române

1.
Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires

1878

NOTIȚĂ ISTORICA

După terminarea studiilor la Facultatea de Științe din Paris, Spiru Haret și-a trecut doctoratul în ziua de 30 Ianuarie (st. n.) 1878.

Examenul era compus din două probe numite *teze* : o chestiune desvoltată pe larg și expusă într'o carte ce trebuia să fie tipărită înainte de examen, după aprobarea decanului Facultății ; două chestiuni date de facultate și la cari candidatul avea să răspunză oral în ziua examenului. Haret a avut pentru teza scrisă o chestiune din *Mecanica cerească* : „Despre invariabilitatea marilor axe ale orbitelor planetare'' și pentru teza orală două chestiuni de *analiză*, formulate astfel : 1. „Théorèmes généraux relatifs à la l'intégration des équations différencielles de la Dinamique'' ; 2. „Developpement en série d'une fonction de deux variables à l'aide des fonctions Y_n de Laplace''.

Volumul în care s'a tipărit prima teză are pe copertă numele comisiunii examinatoare (Prezident : *Puiseux*[1], membri : *Briot*[2] și *Baillaud*)[3] și data 1878. Pe verso găsim numele tuturor profesorilor facultății. Apoi pe foaia următoare dedicația : „*A la mémoire de mon père et de ma mère* ; — *à Mr. N. Cretzulesco, témoignage de reconnaissance*''.[4]

Succesul lui Haret a fost repede cunoscut în țara noastră. Ziarul *Dorobanțul*[5] a anunțat faptul în Nr. dela 30 Ianuarie (st. v.). *Românul*[6] dela 1 Februarie 1878, reproducând informația, adaogă că Ministerul de Instrucție a primit din partea decanului Facultății de Științe o adresă, în care face elogii tânărului matematic și felicită România c'a produs și posedă asemenea talente.

Revista științifică, condusă de P. S. Aurelian și Grigore Ștefănescu, publică o cronică științifică în Nr. său dela 15 Iunie 1878 (pag. 366), în care vorbește de examenul lui Haret și reproduce raportul lui *Puiseux*, președintele comisiunii.

„Teza de mecanică prezentată de d-l Haret avea de obiect celebra problemă a invariabilității marilor axe ale orbitelor planetare.

„Laplace[7] și Lagrange[8] au demonstrat că, dacă se mărginește aproximația la întâia parte a maselor perturbatrice, marile axe nu sunt afectate decât de inegalități periodice. In 1808 Poisson[9] probă că aceeaș propozițiune subsistă când se întinde aproximația la termenii de ordine ai patratului maselor.

„Acum în urmă, d-l Tisserand[10] a arătat că raportând mișcările la sisteme de coordonate deja întrebuințate de Jacobi[11] într'un memoriu celebru, se simplifică foarte mult demonstrațiunea lui Poisson.

„Dificultatea consista mai cu seamă în a clasa termenii foarte numeroși ce formau această nouă aproximație. Autorul tezei izbutește, printr'o discuțiune bine condusă, a-i reduce la un mic număr de forme distincte și arată că una din aceste forme, cu escluderea tuturor celorlalte, procură în expresiunea marilor axe părți seculare.

„Nu trebue să ne grăbim a conchide din aceasta că diferenţele între valorile viitoare ale marilor axe şi valorile lor actuale vor înceta a fi prea mici, căci apariţiunile termenilor de a 3-a ordine proporţionali cu timpul poate ţinea de metoda de aproximaţie întrebuinţată şi poate se vor putea face să dispară, dând o altă formă expresiunilor analitice a marilor axe. Era interesant, cu toate acestea, de a constata că nişte asemenea termeni se prezintă în realitate. Aceasta a făcut d-l Haret şi dând această demonstraţiune în teza sa, a probat că făcuse un studiu foarte serios al teoriei perturbaţiunilor planetare. El a ştiut asemenea să expuie cu claritate şi eleganţă mersul ce a urmat.

„In a doua parte a examenului, candidatul a răspuns *într'un mod satisfăcător la chestiunile ce i s'au pus de Facultate ca subiect de teză de analiză.*

„De aceea Comisiunea *i-a confirmat gradul de doctor, acordându-i cinci bile albe, din şase de cari dispunea.*"

Presa de specialitate din Paris din acel timp se ocupă de teza lui Haret. Reproducem aci o apreciere interesantă din „Bulletin des sciences mathématiques"[12] (1878, pag. 215):

„Mr. Haretu, dans un intéressant mémoire présenté comme thèse à la Faculté des sciences de Paris, étend cette demonstration, aux 3-mes puissances des masses. La substitution de Jacobi, utilisée par Mr. Haretu, le dispense en quelque sorte de distinguer la planète troublée de la planète perturbatrice; en suivant une marche indiquée par Tisserand, il a donc pu faire une étude complète de la question."

Studiul lui Haret ajunge la nişte concluziuni cari devin, de atunci, adevăruri câştigate pentru ştiinţă; despre ele vorbesc specialiştii cari tratează chestiunea.

Iată, de exemplu, ce spune celebrul matematician Henri Poincaré[13] în „*Traite de mecanique celeste*" 1889 (Tom. I, p. 402):

„Après le decouverte de Poisson, on crut longtemps que le théorème était général et que, après l'avoir demontré d'abord pour la première approximation; puis pour la seconde, on ne tarderait pas à la démontrer également pour les approximations suivantes. De grands efforts furent faits dans ce sens et, naturellement, ils furent infructueux.

„En 1878 M. Spiru Haretu montra l'existence de termes en $\mu^3 t$ et ce résultat *causa un grand étonnement, bien que, dès cette epoque, quelque personnes en aient soupçonné la raison. Il n'a plus aujourd'hui rien qui puisse nous surprendre.*"

Tisserand în ale sale „Leçons de mécanique céleste". 1905 (Tom I, p. 308) zice:

„Laplace a le premier énoncé le théorème de l'invariabilité des grands axes... Lagrange démontra ensuite que le théorème subsiste quand on a égard à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons, mais en se bornant toujours aux premières puissances des masses. Poisson réussît à étendre le théorème en tenant compte des termes qui sont du second ordre par rapport aux masses; mais son calcul était long et compliqué. Lagrange a cherché à le simplifier; mais il avait commis une faute de calcul qui reduit sa demonstration à néant... Dans une thèse soutenue à la Sorbonne en 1878 M. Spiru C. Haretu... a repris une ancienne démonstration dans laquelle Poisson croyait avoir prouvé que les grands axes n'ont pas d'inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses, quand on a égard seulement aux variations des éléments de la planète troublée. M. Haretu arrive à montrer que les grands axes ont des inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses ; mais il n'a pas cherché à se faire une idée de la grandeur de ces inégalités... Le Verrier[14] a trouvé un petit terme du troisième ordre en t^2 dans le développement de la partie $\int^n dt$ de la longitude moyenne de Saturne troublé par Jupiter, ce qui confirmerait le resultat de M. Haretu... Il y aurait lieu de chercher l'expression analytique du terme en question ; peut-etre pourrait-on y arriver en partant des formules de M. Haretu."

Profesorul universitar italian *R. Marcolongo*[15] în lucrarea sa de priviri generale intitulată *„Il problema dei tre corpi da Newton ai nostri giorni"*, Milano 1919 (pg. 64) zice :

„Il sig. *Spiru C. Haretu*, riprendendo la memoria del 1816 di Poisson, ha dimostrato che la invariabilità dei grandi assi non esiste pei termini di terzo ordine nelle masse (cubi delle medesime) per la presenza di un termine di terzo ordine, proporzionale al tempo, di cui peraltro egli non ha dato l'espressione analitica. Queste ricerche furono completate da quelle di *Tisserand* e di *Eginitis*. *Tisserand* si fonda sulla teoria di *Delaunay* cercando, in funzione del tempo, gli elementi osculatori, ed il grande asse dell'ellissi kepleriana in funzione delle masse e dei raporti dei moti medi ; e da queste espressioni potè dedurre che la invariabilità non si estende ai termini di quarto e nemmeno a quelli di terzo, come già aveva provato l'*Haretu...*".

Dintre aprecierile specialiştilor români, vom cita studiul lui *Traian Lalescu*,[16] fost profesor la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti, care s'a publicat în „Omagiul" dedicat lui Haret în 1911,[17] sub titlu : *„Spiru Haret ca om de ştiinţă"*. (pg. 12 şi urm.). Aci autorul scrie :

„In această lucrare, Sp. Haret, aplicând o metodă a lui Tisserand pentru calculul funcţiunii perturbatrice, a obţinut un rezultat senzaţional, arătând că, dacă se introduc în calcul puterile de ordinul al treilea al maselor plantelor perturbătoare, expresiunea axei mari a orbitei descrise de planeta principală conţine termeni seculari ; cu alte cuvinte, stabilitatea sistemului solar nu este aşa de sigură, cum o prezenta Poisson.

„Tânărul matematician de atunci avea de înfruntat un adevăr admis de toată lumea şi verificat parţial de un savant de primul ordin".

D. *G. Ţiţeica*, profesor la Facultatea de ştiinţe, membru al Academiei, ales în locul lui Haret, zice în *„Discursul de recepţiune"* (19...)[18] următoarele despre teza de care ne ocupăm :

„Ea e citată în articolele şi cărţile lui H. Poincaré, e menţionată în enciclopedii ştiinţifice şi pretutindeni unde se vorbeşte de aplicarea legii lui Newton la mişcarea planetelor. Ea arată o însuşire specială a minţii sale, darul de a privi problemele mari în faţă şi de a găsi calea pe care aceste probleme pot fi atacate mai uşor".

D-l *N. Coculescu*, profesorul de astronomie de la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, spune în cursul său de „Astronomie teoretică" 1929 (pag. 464) :

„In frumoasa sa teză de doctorat, Spiru Haret a demonstrat că ar apărea termeni seculari în expresia axelor mari, dacă se ţine seamă de perturbaţiile de ordinul al 3-lea în raport cu masele".

Gh. Adamescu.

SUR L'INVARIABILITÉ DES GRANDS AXES DES ORBITES PLANÉTAIRES

(TEZE DE DOCTORAT 1878)

1. Il y a peu de problèmes qui aient exercé la sagacité des géomètres les plus éminents pendant aussi longtemps que celui *des n corps*. L'importance pratique, ainsi que l'intérêt purement scientifique et philosophique qui s'attache à la loi de la gravitation universelle, explique la ténacité avec laquelle les savants, depuis Newton, ont poursuivi l'étude de ce problème.

Malheureusement les équations différentielles des mouvements des corps célestes sont loin d'être complètement intégrées ; et, pour aborder la résolution numérique du problème, on est obligé de recourir à des méthodes d'approximation d'un emploi très laborieux ; mais les propriétés auxquelles on arrive ainsi n'ont nécessairement qu'un degré d'exactitude relatif.

Cependant, parmi ces propriétés, il y en a une qui mérite une atenttion particulière, à cause des conséquences qu'on en peut tirer à l'égard de la stabilité du système du monde ; elle est connue sous le nom d'*invariabilité des grands axes des orbites planétaires*. Voici en quoi elle consiste :

2. On sait que, à cause de la petitesse des masses des planètes par rapport à celle du Soleil, l'orbite que chacune d'elles décrit autour du Soleil s'écarte très peu de la forme de l'ellipse qu'elle décrirait si toutes les masses perturbatrices venaient à disparaître. Cela étant, il était naturel que les géomètres prissent le mouvement elliptique comme point de départ dans les calculs d'approximation qu'ils devaient faire pour arriver à la connaissance du mouvement réel. Tel est le principe de la *méthode de la variation des constantes arbitraires* de Lagrange. Dans cette méthode, on considère les *éléments elliptiques* de la planète comme variant sans cesse à cause des perturbations produites par

les autres planètes, et l'on a trouvé des formules d'une simplicité remarquable qui expriment les variations des éléments elliptiques. Pour intégrer ces formules, il est nécessaire de développer ce que l'on appelle la *fonction perturbatrice* R en une série convergente de sinus ou de cosinus d'arcs proportionnels au temps, ce que l'on peut toujours faire, vu que dans la nature R est toujours fini et continu, et que les orbites des diverses planètes sont toujours peu excentriques et peu inclinées les unes sur les autres. Cela fait, on considère, dans une première approximation, les éléments comme constants, et de simples quadratures donnent alors les *inégalités* que chaque terme du développement de R introduit dans la valeur des éléments elliptiques. Dans la seconde approximation, on substitue les valeurs trouvées pour chaque élément par la première approximation dans les formules qui donnent les variations de ces éléments, et par de nouvelles quadratures on trouve de nouvelles inégalités ; et ainsi de suite.

On peut facilement se faire une idée du degré d'approximation que l'on réalise par ces diverses opérations. La fonction R est linéaire par rapport aux masses des planètes perturbatrices. En supprimant R, on suppose par cela même que ces masses sont nulles ; on a alors les intégrales du mouvement elliptique. Dans la première approximation, l'intégration des équations qui donnent la variation des éléments elliptiques introduit dans les valeurs de ces éléments des termes du premier ordre par rapport aux masses perturbatrices. Ces valeurs étant substituées dans les mêmes équations, on aura, en intégrant, des termes du second ordre par rapport à ces masses ; et ainsi de suite. Ainsi l'ordre des inégalités successivement introduites est égal au nombre des approximations successives que l'on a effectuées pour y arriver.

3. On doit distinguer deux espèces d'inégalités : 1° celles provenant des termes de R qui contiennent le temps explicitement, et qui par l'intégration donnent toujours des termes périodiques à courte période ; ces inégalités sont peu importantes, parce que dans une longue suite de siècles elles se compensent et ne peuvent pas apporter des changements considérables dans le système du monde ; 2° celles qui sont produites par les termes de R qui ne contiennent pas le temps explicitement ; celles-ci

augmentent lentement, mais continuellement, pendant très longtemps et toujours dans le même sens, et peuvent introduire avec le temps des modifications très sensibles dans la constitution de l'Univers : on les appelle des *inégalités séculaires.*

Or il est très remarquable que les grands axes des orbites planétaires ne sont pas affectés d'inégalités séculaires, du moins quand on tient compte seulement des deux premières puissances des masses ; c'est en cela que consiste l'*invariabilité des grands axes des orbites.*

4. Ce n'est que peu à peu et avec beaucoup de difficultés que cette belle propriété a été établie. Laplace est le premier qui l'énonça [1]) ; mais il ne tenait compte que des premières puissances des masses et des quantités du premier et du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Lagrange démontra ensuite [2]) qu'elle était vraie même quand on tenait compte de toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons ; mais il ne dépassa pas la première puissance des masses. Dans un Mémoire lu à l'Institut le 20 juin 1808 ([3]), Poisson réussit à l'étendre aux secondes puissances des masses ; mais son calcul est extrêmement long et pénible. Plus tard on réussit à le simplifier beaucoup en faisant usage de la méthode de la variation des constantes arbitraires, découverte par Lagrange ; c'est cette méthode que M. Liouville (19) a suivie dans ses leçons au Collège de France en 1841, et que M. V. Puiseux a reproduite avec quelques modifications dans la Thèse pour le Doctorat qu'il a présentée à la même époque à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans le Mémoire de Poisson, ainsi que dans la Thèse de M. Puiseux, on doit distinguer deux parties : dans la première, on considère seulement les variations des éléments de la planète troublèe, et l'on prouve qu'elles ne produisent pas, dans le grand axe, des inégalités séculaires du second ordre par rapport aux masses ; cette partie de la démonstration est assez simple et facile à suivre. Dans la seconde, on tient compte des variations des éléments des planètes perturbatrices ; le calcul diffère entièrement du précédent, par la raison que la fonction perturba-

1. Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1773.

2. *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1776.

3. Ce Mémoire a été publié dans le XV-e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* année 1809, p. 1—56.

trice varie d'une planète à l'autre ; c'est pourquoi on a été obligé de recourir à l'équation des forces vives et de faire des combinaisons très ingénieuses, mais indirectes et assez laborieuses, pour prouver qu'il n'existe pas dans le grand axe de l'orbite de la planète troublée d'inégalités séculaires du second ordre provenant de cette espèce de variations.

5. Lagrange a eu l'idée, en 1808 [1]), de considérer le mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité commun ; dans ce cas, la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes ; mais son calcul est entaché de plusieurs fautes de signe, ce qui en détruit toute la valeur.

M. Tisserand, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* ([2]), a indiqué un autre moyen pour arriver au même résultat : il fait usage d'un changement de coordonnées employé par Jacobi dans son célèbre Mémoire *Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps*. Il arrive ainsi à faire en sorte que les diverses fonctions perturbatrices ne diffèrent que par un facteur constant, ce qui permet de ramener la seconde partie de l'analyse de Poisson à la première.

Je me propose, dans ce travail, d'exposer la méthode de M. Tisserand. De plus, je reprends une ancienne démonstration de Poisson ([3]), par laquelle l'illustre géomètre croyait être parvenu à prouver que le grand axe n'éprouve pas d'inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses, quand on tient compte seulement des variations des éléments de la planète troublée ; il avait reculé devant la tâche d'aborder la seconde partie de la question, à cause de la complication excessive qu'auraient eue les calculs s'il avait appliqué la même méthode qui lui avait servi pour les carrés des masses. Mais la démonstration de Poisson n'est pas complète encore à un autre point de vue : c'est qu'il ne tient pas compte d'une classe de termes d'une forme particulière, qui s'introduisent dans l'expression du demi-grand axe, dès la seconde puissance des masses. En comblant cette lacune, je fais voir quedes termes séculaires apparaissent

1. *Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, t. IX, année 1808. — *Oeuvres complètes*, édition de M. J.-A. Serret, t. VI.
2. T. LXXXII, numéro du 21 février 1876.
3. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. I. P. 55—67, année 1816.

dans la valeur du demi-grand axe, dès la troisième puissance des masses, ce qui est diamétralement opposé à la conclusion du Mémoire de Poisson. Dans la suite de ce Mémoire, je montre, d'après la méthode de Poisson, que les termes séculaires ainsi introduits ne peuvent pas disparaître avec d'autres, puisque tous les autres termes séculaires de l'ordre du cube des masses s'entre-détruisent ; je complète cette partie de la démonstration de Poisson en tenant compte aussi des variations des éléments des planètes perturbatrices, ce qui n'est pas difficile si l'on fait usage de la transformation de M. Tisserand.

Ainsi cette propriété de l'invariabilité des grands axes, que beaucoup de géomètres, et Poisson lui-même, croyaient être tout à fait générale, a ce point qu'on avait même essayé de le prouver directement [1]), n'existe pas même pour la troisième puissance des masses ; ce qui est un résultat assez important, tant au point de vue analytique qu'à celui de la pratique de l'Astronomie mathématique

I.

6. On sait que, dans le problème de $n+1$ corps, les équations différentielles du mouvement absolu des différents mobiles sont de la forme

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{m_im_j(x_j-x_i)}{\delta_{ij}^3}+\frac{m_im_k(x_k-x_i)}{\delta_{ik}^3}+\ldots,$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{m_im_j(y_j-y_i)}{\delta_{ij}^3}+\frac{m_im_k(y_k-y_i)}{\delta_{ik}^3}+\ldots,$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{m_im_j(z_j-z_i)}{\delta_{ij}^3}+\frac{m_im_k(z_k-z_i)}{\delta_{ik}^3}+\ldots,$$

$$m_j\frac{d^2x_j}{dt^2}=\frac{m_jm_i(x_i-x_j)}{\delta_{ij}^3}+\frac{m_jm_k(x_k-x_j)}{\delta_{jk}^3}+\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où

$$\delta_{ij}^2=(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2,\quad \ldots.$$

1. *Voir* un *Mémoire* de M. Maurice et plusieurs Notes sur ce Mémoire dans le tome XV des *Comptes rendus*.

Si l'on pose

$$U = \sum \frac{m_i m_j}{\delta_{ij}},$$

le signe Σ s'étendant à tous les termes que l'on obtient quand on fait varier chacun des indices i et j de zéro jusqu'à n, sauf ceux pour lesquels $i=j$, ces équations prennent la forme

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \ldots.$$

U est ce que l'on appelle la *fonction des forces.*

7. Remplaçons maintenant les variables x_i, y_i, z_i, $x_j, \ldots$ par un système de coordonnées ainsi défini. Soient G_1 le centre de gravité de m_0 et de m_1; G_2 celui de m_0, m_1 et m_2; ... ; G_{n-1} celui de m_0 m_1, ..., m_{n-1}; G celui de tout le système. Nous prendrons pour nouvelles variables : ξ_1, η_1, ζ_1, coordonnées de m_1 par rapport à trois axes, parallèles aux axes fixes et passant par m_0; ξ_2, η_2, ζ_2 celles de m_2 par rapport à des axes passant par $G_1, \ldots$; ξ_n, η_n, ζ_n celles de m_n par rapport à G_{n-1}; enfin les coordonnées X, Y, Z de G par rapport aux axes fixes.

Soient X_i, Y_i, Z_i les coordonnées de G_i par rapport aux axes fixes, et posons

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_i = \mu_i.$$

On a

$$(2) \quad x_1 = x_0 + \xi_1, \; x_2 = X_1 + \xi_2, \; \ldots, \; x_{n-1} = X_{n-2} + \xi_{n-1}, \; x_n = X_{n-1} + \xi_n.$$

Mais, d'après les propriétés du centre de gravité, on a aussi

$$(3) \qquad \begin{cases} \mu_1 X_1 = m_0 x_0 + m_1 x_1, \\ \mu_2 X_2 = m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mu_n X_n = m_0 x_0 + m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n. \end{cases}$$

Substituant dans (2) ces valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, puis éliminant successivement entre les n équations qui résultent de cette substitution $n-1$ des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, on trouve

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&x_1 = x_0 + \xi_1,\\
&x_2 = x_0 + \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 + \xi_2,\\
&x_3 = x_0 + \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 + \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 + \xi_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&x_n = x_0 + \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 + \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 + \dots + \frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}}\xi_{n-1} + \xi_n.
\end{aligned}
\right.
$$

Portant ces valeurs dans la dernière équation (3), on obtient

$$
x_0 = \mathrm{X} - \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 - \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 - \dots - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n;
$$

et cette relation, combinée avec les équations (4), donnera enfin les formules de transformation suivantes :

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&x_0 = \mathrm{X} - \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 - \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 - \frac{m_3}{\mu_3}\xi_3 - \dots - \frac{n}{\mu_n}\xi_n,\\
&x_1 = \mathrm{X} + \frac{\mu_0}{\mu_1}\xi_1 - \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 - \frac{m_3}{\mu_3}\xi_3 - \dots - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n,\\
&x_2 = \mathrm{X} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\xi_2 - \frac{m_3}{\mu_3}\xi_3 - \frac{m_4}{\mu_4}\xi_4 - \dots - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&x_{n-1} = \mathrm{X} + \frac{\mu_{n-2}}{\mu_{n-1}}\xi_{n-1} - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n,\\
&x_n \;\;= \mathrm{X} + \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\xi_n.
\end{aligned}
\right.
$$

Un calcul identique donnerait $y_0, y_1, \dots y_n$ et $z_0, z_1, \dots, z_n$, en fonction de $\mathrm{Y}, \eta_1, \eta\ , \dots, \eta_n$ et $\mathrm{Z}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$.

8. On sait que, lorsque la fonction des forces existe, ce qui est notre cas, Lagrange a donné le moyen d'écrire les équa-

tions du mouvement dans un système de coordonnées quelconques. Pour cela, on exprime U, la fonction des forces, et T, la demi-somme des forces vives, en fonction des nouvelles coordonnées réduites au plus petit nombre possible par les équations de liaison ; alors les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \xi_i'} - \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0.$$

Dans le problème de $n+1$ corps, U, étant simplement fonction des différences des coordonneés rectangulaires, x_0, $x_1, \ldots$, sera indépendant de X, Y, Z, d'après la forme des équations (5) ; on aura donc

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \frac{\partial U}{\partial Z} = 0.$$

Les équations (5) étant linéaires, T sera indépendant de X, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, Y, . . . On trouve facilement

$$2T = \mu_n (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + \frac{\mu_0 m_1}{\mu_1}(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)$$
$$+ \frac{\mu_1 m_2}{\mu_2}(\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2) + \ldots + \frac{\mu_{n-1} m_n}{\mu_n}(\xi_n'^2 + \eta_n'^2 + \zeta_n'^2),$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i'} = \frac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\xi_i', \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial X'} = \mu_n X', \quad \frac{\partial T}{\partial X} = 0.$$

Les équations du mouvement seront donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2X}{dt^2} = 0, \quad \dfrac{d^2Y}{dt^2} = 0, \quad \dfrac{d^2Z}{dt^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} - \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0, \quad \dfrac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} - \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i} = 0, \\[2ex] \qquad \dfrac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} - \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_i} = 0. \end{array} \right.$$

Les trois premières donnent la propriété bien connue du mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité.

9. Supposons maintenant que m_0 soit le Soleil, dont je prends la masse pour unité, les masses des diverses planètes étant

considérées comme de petites quantités du premier ordre. Alors

$$\mathrm{U}=\sum\frac{m_i}{\delta_{0i}}+\sum\frac{m_i m_j}{\delta_{ij}};$$

mais

$$x_i-x_0=\xi_i+\frac{m_1}{\mu_1}\xi_1+\frac{m_2}{\mu_2}\xi_2+\ldots+\frac{m_{i-1}}{\mu_{i-1}}\xi_{i-1};$$

et, si l'on pose

$$r_i^2=\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2,$$

on a

$$\delta_{0i}^2=r_i^2+\mathrm{P},$$

P ne contenant que des termes du premier et du second ordre par rapport aux masses ; par suite

$$\sum\frac{m_i}{\delta_{0i}}=\sum\frac{m_i}{r_i}\left(1+\frac{\mathrm{P}}{r_i^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum\frac{m_i}{r_i}+\mathrm{Q},$$

Q étant du second ordre ; d'autre part, $\sum\frac{m_i m_j}{\delta_{ij}}$ est encore du second ordre ; donc $\mathrm{U}-\sum\frac{m_i}{r_i}$ est une quantité du second ordre, et il en est de même de

$$\mathrm{U}-\sum\frac{m_i(1+m_i)\mu_{i-1}}{\mu_i}\frac{1}{r_i}=\mathrm{V}.$$

Si, dans (6), on remplace U par sa valeur tirée de cette relation, les équations du mouvement prendront la forme

$$\frac{\mu_{i-1}m_i}{\mu_i}\frac{d^2\xi_i}{dt^2}+\frac{m_i(1+m_i)\mu_{i-1}}{\mu_i}\frac{\xi_i}{r_i^3}-\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\xi_i}=0$$

ou bien

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\xi_i}{dt^2}+\dfrac{(1+m_i)\xi_i}{r_i^3}-\dfrac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}\dfrac{\partial\mathrm{V}}{\partial\xi_i}=0;\\ \text{et de même}\\ \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2}+\dfrac{(1+m_i)\eta_i}{r_i^3}-\dfrac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}\dfrac{\partial\mathrm{V}}{\partial\eta_i}=0,\\ \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2}+\dfrac{(1+m_i)\zeta_i}{r_i^3}-\dfrac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}\dfrac{\partial\mathrm{V}}{\partial\zeta_i}=0.\end{array}\right.$$

On voit que c'est exactement la forme des équations du mouvement d'une planète autour du Soleil, avec la fonction perturbatrice

$$R_i = -\frac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}V = -\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{\mu_{i-1}}\right)V,$$

qui est la même pour toutes les planètes, au facteur constant $\frac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}$ près. Cette fonction est encore du premier ordre par rapport aux masses, comme dans le calcul ordinaire des perturbations ; mais, au lieu d'être linéaire, elle contient des termes de tous les ordres, entiers et positifs, par rapport à ces masses.

10. Négligeons d'abord entièrement les masses perturbatrices et considérons simplement les équations

$$(8)\quad \frac{d^2\xi_i}{dt^2}+\frac{(1+m_i)\xi_i}{r_i^3}=0,\quad \frac{d^2\eta_i}{dt^2}+\frac{(1+m_i)\eta_i}{r_i^3}=0,\quad \frac{d^2\zeta_i}{dt^2}+\frac{(1+m_i)\zeta_i}{r_i^3}=0.$$

Leur intégration donnera le mouvement elliptique de m_i autour de G_{i-1}, et introduira six constantes arbitraires, qui sont les *éléments du mouvement elliptique de* m_i. J'adopterai les éléments astronomiques, qui sont : le *demi-grand axe* a_i de l'orbite, qui est lié au *moyen mouvement* n_i par la relation

$$n_i = \sqrt{\frac{1+m_i}{a_i^3}};$$

l'*excentricité* de l'orbite e_i ; l'*inclinaison* φ_i du plan de cette orbite sur le plan XOY ; la *longitude du noeud ascendant* θ_i ; la *longitude du périhélie* ϖ_i ; la *longitude moyenne de l'époque* ε_i.

Mais, si l'on veut avoir les intégrales du système (7), il faut considérer les éléments elliptiques non pas comme des constantes, mais comme des fonctions du temps, assujetties à la condition que les valeurs de ξ_i, η_i, ζ_i, données par l'intégration du système (8), et dans lesquelles on considère ces éléments comme variables, satisfassent au système (7). Si, de plus, on s'impose la condition que les dérivées premières de ξ_i, η_i, ζ_i par rapport au temps aient la même forme dans le mouvement troublé que dans le mouvement elliptique, on arrive aux équations suivantes, qui donnent les variations des divers éléments, produites par la force perturbatrice R_i :

$$
(9)\quad \begin{cases}
\dfrac{da_i}{dt} = -\dfrac{2}{n_i a_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i}, \\[2ex]
\dfrac{de_i}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial \pi_i} + \dfrac{\sqrt{1-e_i^2}\,(1-\sqrt{1-e_i^2})}{n_i a_i^2 e_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i}, \\[2ex]
\dfrac{d\varphi_i}{dt} = \dfrac{1}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}\sin\varphi_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial \theta_i} + \dfrac{\tang\dfrac{\varphi_i}{2}}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\left(\dfrac{\partial R_i}{\partial \pi_i} + \dfrac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i}\right), \\[2ex]
\dfrac{d\theta_i}{dt} = -\dfrac{1}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}\sin\varphi_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial \varphi_i}, \\[2ex]
\dfrac{d\pi_i}{dt} = -\dfrac{\tang\dfrac{\varphi_i}{2}}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\dfrac{\partial R_i}{\partial \varphi_i} - \dfrac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial e_i}, \\[2ex]
\dfrac{d\varepsilon_i}{dt} = \dfrac{2}{n_i a_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial a_i} - \dfrac{\sqrt{1-e_i^2}\,(1-\sqrt{1-e_i^2})}{n_i a_i^2 e_i}\dfrac{\partial R_i}{\partial e_i} - \dfrac{\tang\dfrac{\varphi_i}{2}}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\cdot\dfrac{\partial R_i}{\partial \varphi_i}.
\end{cases}
$$

Je dis qu'il suffit de prouver que, en vertu des équations (9), a_i n'a pas d'inégalités séculaires d'un ordre quelconque, pour en conclure que, dans la nature, les demi-grands axes des ellipses que décrivent les planètes autour du Soleil n'en ont pas non plus. En effet, d'après le système de coordonnées adopté, les équations (7) donnent pour m_1 précisément le mouvement troublé autour du Soleil ; et, comme on peut prendre pour m_1 n'importe laquelles des planètes considérées, la proposition est démontrée.

11. V est fonction des coordonnées elliptiques ξ_1, η_1, ζ_1 ; $\xi_2, \ldots$; mai ces coordonnées, étant des fonctions périodiques du temps, peuvent être développées en séries suivant les sinus ou les cosinus d'angles tels que $\alpha(n_i t+\varepsilon_i)$, $\beta(n_j t+\varepsilon_j)$, . . . Or, si V_1 désigne l'ensemble des termes de V qui sont du second ordre

par rapport aux masses, V_2 ceux du troisième ordre, etc., on peut se convaincre que V_1, V_2, ... ont les formes suivantes :

$$V_1 = \Sigma m_i m_j f_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \xi_j, \eta_j, \zeta_j),$$
$$V_2 = \Sigma m_i m_j m_k f_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \xi_j, \eta_j, \zeta_j, \xi_k, \eta_k, \zeta_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et, après le développement,

$$V_1 = \Sigma\, C_1 m_i m_j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[\alpha(n_i t + \varepsilon_i) + \beta(n_j t + \varepsilon_j) + \omega_1],$$

$$V_2 = \Sigma C_2 m_i m_j m_k \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[\alpha(n_i t + \varepsilon_i) + \beta(n_j t + \varepsilon_j) + \gamma(n_k t + \varepsilon_k) + \omega_2],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

C_1, C_2, ..., ω_1, ω_2, ... sont des fonctions des éléments elliptiques des diverses planètes considérées, mais qui ne contiennent pas les ε ni les m ; α, β, γ, ... sont des nombres entiers qui prennent toutes les valeurs possibles entre $-\infty$ et $+\infty$.

Enfin on sait, que, pour éviter que $\frac{\partial R_i}{\partial a_i}$ contienne t en dehors des signes sin et cos, il suffit de remplacer, dans les équations (9), ε_i par $\varepsilon_i - n_i t$, $+ \int n_i dt$, et d'y supprimer la partie de $\frac{\partial R_i}{\partial a_i}$ qui provient de la variation de $\int n_i dt$. De même pour les autres planètes.

Pour faciliter l'écriture, je poserai

$$M_i = -\frac{\mu_i}{m_i \mu_{i-1}} = -\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{\mu_{i-1}}\right), \quad \rho_i = \int n_i dt,$$
$$l_i = \int n_i dt + \varepsilon_i = \rho_i + \varepsilon_i, \quad \psi = \alpha l_i + \beta l_j\,;$$

l_i est la *longitude moyenne* de la planète m_i.

12. L'équation

$$\text{(10)} \qquad \frac{da_i}{dt} = -\frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}$$

montre immédiatement que a_i n'a pas d'inégalités séculaires du premier ordre par rapport aux masses. En effet, pour avoir ces inégalités, il est clair qu'il suffira de considérer, dans le second membre de l'équation (10), le terme $+\frac{2}{m_i n_i a_i}\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i}$, et de prendre dans le développement de V_1 seulement les termes dont l'argument ne renferme pas t, en y regardant les éléments elliptiques comme constants. Or ces termes sont en même temps indépendants de ε_i, et, par suite, $\frac{da_i}{dt} = 0$.

II.

13. Passons aux termes de l'ordre du carré des masses, et prouvons qu'il n'en existe pas dans la valeur de $\frac{da_i}{dt}$ qui soient indépendants du temps.

Si l'on néglige les termes d'un ordre supérieur au second, on a d'abord

$$(11)\quad \frac{da_i}{dt} = \frac{2}{m_i n_i a_i}\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i} + \frac{2}{\mu_{i-1} n_i a_i}\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i} + \frac{2}{m_i n_i a_i}\frac{\partial V_2}{\partial \varepsilon_i},$$

et ces termes sont entièrement périodiques.

Mais ce ne sont pas là les seuls termes du second ordre qui se trouvent dans $\frac{da_i}{dt}$; en effet, supposons que l'on intègre les équations (9) en ne tenant compte que des premières puissances des masses; on obtiendra alors, pour les divers éléments, des valeurs de cette forme :

$$a_i + \delta a_i,\ \theta_i + \Delta\theta_i + \delta\theta_i,\ e_i + \Delta e_i + \delta e_i, \ldots,\ a_j + \delta a_j, \ldots,$$

Δ désignant les inégalités séculaires et δ les inégalités périodiques; toutes ces inégalités sont du premier ordre par rapport aux masses. Si donc, dans le second membre de (11), on remplace les divers éléments par les valeurs précédentes, les nouveaux termes que l'on obtiendra en dehors de ceux qui s'y trouvent déjà seront au moins de l'ordre du carré des masses. Il s'agit d'examiner si, dans cette substitution, il ne se produit pas des combinaisons de nature à donner naissance à des termes non périodiques du second ordre dans la valeur de a_i.

Pour cette analyse, il suffirait de conserver dans (11) seulement le terme $+\dfrac{2}{m_i n_i a_i}\dfrac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i}$; car, les deux autres étant déjà du second ordre, leurs variations seront du troisième. Cependant il est préférable de considérer la formule générale

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}$$

et de supposer que l'on néglige partout les termes de $M_i V$, dont l'ordre est supérieur à celui que l'on veut conserver. Cette manière de procéder, que nous conserverons aussi quand il s'agira des termes du troisième ordre, permettra d'apporter quelques simplifications et plus d'uniformité dans les calculs qui se rapportent aux carrés et aux cubes des masses.

De plus, il est inutile d'introduire les variations séculaires Δ. En effet, on sait que ces variations s'expriment par des sinus et des cosinus dont les arguments sont de l'ordre des masses; les termes de V, au contraire, ont des arguments finis, et, par conséquent, il est impossible que la multiplication de ces deux espèces de termes fasse disparaître le temps dans les arguments et donne naissance à des termes séculaires.

14. Faisons d'abord varier seulement les éléments de la planète troublée m_i; si l'on pose

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} = V'_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho_j} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_j} = V'_j,$$

on aura

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{2M_i}{n_i a_i}V'_i - \frac{M_i}{n_i a_i^2}V'_i \delta a_i - \frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial M_i}{\partial \rho_i}\delta\rho_i - \frac{2M_i}{n_i a_i}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial \varepsilon_i}\delta\varepsilon_i + \frac{\partial V'_i}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial V'_i}{\partial q_i}\delta q_i + \dots\right); \tag{12}$$

p_i, q_i. . . désignent les divers éléments de m_i. Dans $M_i V$ et ses dérivées, il faut négliger tous les termes d'un ordre supérieur au premier, excepté dans $-\dfrac{2M_i}{n_i a_i}V'_i$, où l'on doit conserver ceux du premier et du second ordre. Quant aux variations $\delta\varepsilon_i$, δp_i, δq_i, . . ., on les calculera par les formules (9), dans les seconds membres desquelles on ne conservera que les termes du premier ordre, et l'on considérera les éléments comme constants.

Le premier terme de (12), $-\frac{2M_i}{n_i a_i}V'_i$, est périodique.

Dans le second, V'_i et δa_i sont tous les deux périodiques; et, pour avoir un terme séculaire, il faudrait multiplier des termes de même argument de V'_i et de δa_i. Si l'on réduit $M_i V$ aux seuls termes dont l'argument est ψ, on a

$$M_i V = A\sin\psi + B\cos\psi = C\sin(\psi+\omega). \tag{13}$$

où A, B, C, ω ne contiennent ni t, ni ε_i, ε_j, . . . et A, B, C sont du premier ordre; on tire de là

$$M_i V'_i = C\alpha\cos(\psi+\omega),$$

et alors (10) donne

$$\delta a_i = -\frac{2C\alpha}{n_i a_i(\alpha n_i+\beta n_j)}\sin(\psi+\omega);$$

donc

$$-\frac{M_i}{n_i a_i^2}V'_i\delta a_i = \frac{C^2\alpha^2}{n_i^2 a_i^3(\alpha n_i+\beta n_j)}\sin 2(\psi+\omega),$$

quantité périodique.

Le terme $-\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_i}\delta\rho_i$ est encore périodique; en effet,

$$M_i\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_i} = -C\alpha^2\sin(\psi+\omega);$$

ensuite

$$\rho_i = \int n_i dt,\ \frac{d^2\rho_i}{dt^2} = -\frac{3}{2}\frac{n_i}{a_i}\frac{da_i}{dt} = \frac{3M_i}{a_i^2}V'_i,$$

$$\delta\rho_i = -\frac{3C\alpha}{a_i^2(\alpha n_i+\beta n_j)^2}\cos(\psi+\omega_i);$$

donc

$$-\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_i}\delta\rho_i = -\frac{3C^2\alpha^3}{n^i a_i^3(\alpha n_i+\beta n_j)_3}\sin 2(\psi+\omega).$$

Enfin, pour le dernier terme, on doit remarquer que, en vertu des formules (9), on a

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_i &= +\,\mathrm{FM}_i\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_i}dt + \mathrm{GM}_i\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}dt + \ldots,\\
\delta p_i &= -\,\mathrm{FM}_i\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_i}dt + \mathrm{HM}_i\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}dt + \ldots,\\
\delta q_i &= -\,\mathrm{GM}_i\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_i}dt - \mathrm{HM}_i\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_i}dt + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

F, G, H,... étant fonctions de p_i, q_i,..., mais ne contenant pas ε_i; donc ce dernier terme sera composé de parties de la forme

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{2\mathrm{FM}_i^2}{n_i a_i}\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \varepsilon_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_i}dt - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_i}dt\right) - \ldots\\
&-\frac{2\mathrm{HM}_i^2}{n_i a_i}\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}dt - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial q_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_i}dt\right) - \ldots
\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace M_i V par A sin ψ + B cos ψ, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_i^2\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \varepsilon_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_i}dt = \mathrm{M}_i^2\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_i}dt\\
&\qquad = \frac{\alpha^2}{\alpha n_i + \beta n_j}(\mathrm{A}\sin\psi + \mathrm{B}\cos\psi)\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_i}\cos\psi - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial p_i}\sin\psi\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_i^2\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}dt = \mathrm{M}_i^2\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial q_i}\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_i}dt\\
&\qquad = -\frac{\alpha}{\alpha n_i + \beta n_j}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_i}\cos\psi - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial p_i}\sin\psi\right)\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_i}\cos\psi - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q_i}\sin\psi\right);
\end{aligned}$$

la dernière partie de $\frac{da_i}{dt}$, dans (12), est donc nulle, quant aux termes séculaires.

15. Il importe de remarquer que, parmi les termes compris dans l'expression générale (14), il s'en trouve un certain nombre qui ne peuvent pas se réduire à la forme A cos $(\psi+\omega)$; ce sont ceux que l'on forme en prenant pour V, sous le signe d'intégra-

tion, dans l' expression (14), ses termes constants. On obtient alors des termes tels que $At \cos(\psi+\omega)$. Les termes de cette espèce introduiront dans la valeur de a_i des inégalités de la forme $At \sin(\psi+\omega)$, qui sont, en quelque sorte, intermédiaires entre les inégalités séculaires et les inégalités périodiques. En effet, la période du cosinus est $\frac{2\pi}{\alpha n_i+\beta n_j}$, et elle est ordinairement assez peu considérable ; mais, d'autre part, la valeur absolue du terme peut devenir très grande, à cause du facteur t qu'il renferme en dehors du signe cos, ce qui rapproche l'inégalité à laquelle il donne lieu des inégalités séculaires, dont la valeur maxima est d'habitude beaucoup plus considérable que celle des inégalités périodiques.

Du reste, on peut remarquer que tous les termes de la forme $At \cos(\psi+\omega)$ que l'on introduit ainsi sont du second ordre, et que la forme la plus générale de leur argument est $\psi=\alpha l_i+\beta l_j$.

16. Examinons maintenant les termes qui proviennent de la variation des éléments des planètes perturbatrices. Ce sont

$$(15)\qquad -\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_j}\delta\rho_j-\ldots-\frac{2M_i}{n_i a_i}\left(\frac{\partial V_i'}{\delta\varepsilon_j}\delta\varepsilon_j+\frac{\partial V_i'}{\partial p_j}\delta p_j+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial V_i'}{\partial q_j}\delta q_j+\ldots\right)-\ldots.$$

Comme la fonction perturbatrice est la même, à un facteur constant près, pour toutes les planètes, le calcul à faire pour prouver que ces termes sont périodiques est identique au précédent. Ainsi l'on a

$$M_i\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_j}=-C\alpha\beta\sin(\psi+\omega),$$

$$\rho_j=\int n_j dt,\ \frac{d^2\rho_j}{dt^2}=-\frac{3}{2}\frac{n_j}{a_j}\frac{da_j}{dt}=\frac{3M_j}{a_j^2}V_j',$$

$$\delta\rho_j=-\frac{3M_jC\beta}{M_i a_j^2(\alpha n_i+\beta n_j)^2}\cos(\psi+\omega)\,;$$

$$-\frac{2M_i}{n_i\ _i}\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_j}\delta\rho_j=-\frac{3M_j C^2\alpha\beta^2}{M_i a_j^2 n_i a_i(\alpha n_i+\beta n_j)^2}\sin 2(\psi+\omega).$$

On voit déjà que le premier des termes (15) est périodique.

On a ensuite

$$\delta\varepsilon_j = +\,\mathrm{FM}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_j}\,dt + \mathrm{GM}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_j}\,dt + \ldots,$$

$$\delta p_j = -\,\mathrm{FM}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_j}\,dt + \mathrm{HM}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_j}\,dt + \ldots,$$

$$\delta q_j = -\,\mathrm{GM}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_j}\,dt - \mathrm{HM}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_j}\,dt + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le second terme (15) sera donc de la forme

$$-\frac{2\mathrm{FM}_i\mathrm{M}_j}{n_i \mathrm{a}_i}\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \varepsilon_j}\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_j}\,dt - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial p_j}\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_j}\,dt\right) - \ldots,$$

$$-\frac{2\mathrm{HM}_i\mathrm{M}_j}{n_i \mathrm{a}_i}\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial p_j}\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_j}\,dt - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial q_j}\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_j}\,dt\right) - \ldots.$$

Effectuant le calcul, on verra encore que, dans cette quantité, la partie non périodique est nulle. Cependant on peut voir qu'elle renferme aussi des termes de la forme $\mathrm{A}t \cos(\psi + \omega)$.

L'invariabilité des grands axes est donc démontrée pour les secondes puissances des masses, comme elle l'a été pour les premières.

III.

17. Passons aux termes du troisième ordre. Des termes de cette espèce se trouvent d'abord dans $\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i$ lorsqu'on y considère les éléments comme constants. On en forme d'autres quand on fait varier ces éléments dans chacun des facteurs $\frac{1}{n_i \mathrm{a}_i}$ et $\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i$, en allant jusqu'aux termes du troisième ordre.

Faisons d'abord varier seulement $\frac{1}{n_i \mathrm{a}_i}$; on a alors

$$(16)\qquad \frac{d\mathrm{a}_i}{dt} = -\frac{2}{n_i \mathrm{a}_i}\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i - \frac{1}{n_i \mathrm{a}_i^2}\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i\,\delta\mathrm{a}_i + \frac{1}{4n_i \mathrm{a}_i^3}\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i\,\delta\mathrm{a}_i^2.$$

On doit considérer les coefficients $\frac{2}{n_i \mathrm{a}_i}$, $\frac{1}{n_i \mathrm{a}_i^2}$, $\frac{1}{4n_i \mathrm{a}_i^3}$, dans le second membre, comme des constantes absolues. Ensuite, pour avoir tous les termes du troisième ordre, comme $\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i$ et $\delta\mathrm{a}_i$ sont chacun du premier ordre, il faut, dans le premier terme, calculer $M_i V'_i$ jusqu'au troisième ordre ; dans le deuxième, remplacer chacun des facteurs $M_i V'_i$ et δa_i par sa valeur jusqu'aux quantités du second ordre ; dans le troisième, prendre pour $M_i V'_i$ et δa_i seulement leurs termes du premier ordre.

18. Considérons la partie

$$-\frac{1}{n_i a_i^2} M_i V'_i \delta a_i.$$

L'équation

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{2 M_i V'_i}{n_i a_i},$$

dans laquelle on calcule le second membre jusqu'aux termes du second ordre inclusivement, donnera δa_i avec ce degré d'approximation ; on aura donc

$$-\frac{1}{n_i a_i^2} M_i V'_i \delta a_i = +\frac{2}{n_i a_i^2} M_i V'_i \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt$$

D'autre part, on a

$$n_i a_i = n_i a_i - \frac{n_i}{2} \delta a_i = n_i a_i + n_i \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt,$$

en considérant les éléments comme constants dans le second membre. Multiplions le second membre de l'équation précédente par cette valeur de $n_i a_i$ et par $\frac{1}{n_i a_i}$; on aura

$$(17) \quad -\frac{1}{n_i a_i^2} M_i V'_i \delta a_i = \frac{2}{a_i} \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt + \frac{2}{a_i^2} \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \left(\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt \right)^2;$$

les coefficients $\frac{2}{a_i}$ et $\frac{2}{a_i^2}$ sont des constantes absolues.

On a aussi

$$(18) \qquad +\frac{1}{4 n_i a_i^3} M_i V'_i \delta a_i^2 = +\frac{1}{n_i a_i^3} M_i V'_i \left(\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt \right)^2.$$

Pour avoir les termes du troisième ordre, il suffit, dans le dernier terme de (17) et dans le second membre de (18), de considérer les éléments comme constants, en conservant seulement les termes du premier ordre de $M_i V'_i$, et, dans le premier terme du second membre de (17), de calculer $\frac{M_i V'_i}{n_i a_i}$ jusqu'aux quantités du second ordre ; on aura donc

$$(19)\quad -\frac{1}{n_i a_i^2} M_i V'_i \delta a_i + \frac{1}{4 n_i a_i^3} M_i V'_i \delta a_i^2 = \frac{2}{a_i} \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt + $$
$$+ \frac{3}{n_i^3 a_i^5} M_i^3 V'_i \left(\int V'_i dt\right)^2.$$

19. On a vu (n^{os} 13, 14, 15, 16) que $\frac{M_i V'_i}{n_i a_i}$ ne renferme pas de termes séculaires jusqua'aux quantités du second ordre inclusivement ; on peut donc poser, avec ce degré d'approximation, et en désignant respectivement par ψ et χ des angles dont l'expressison la plus générale est $\alpha l_i + \beta l_j$ et $\alpha' l_i + \beta' l_j + \gamma' l_k$,

$$\frac{M_i V'_i}{n_i a_i} = \Sigma\, C_1 \sin(\psi + \omega_1) + \Sigma\, C_2 \sin(\chi + \omega_2) + \Sigma\, C'_2 t \sin(\psi + \omega_3),$$

où C_1 est du premier ordre, C_2 et C'_2 du second ordre par rapport aux masses ; on tire de là

$$\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt = -\sum \frac{C_1}{\alpha n_i + \beta n_j} \cos(\psi + \omega_1) - \sum \frac{C_2}{\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k} \cos(\chi + \omega_2)$$
$$-\sum \frac{C'_2 t}{\alpha n_i + \beta n_j} \cos(\psi + \omega_3) + \sum \frac{C'_2}{(\alpha n_i + \beta n_j)^2} \sin(\psi + \omega_3).$$

La partie du troisième ordre $\frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt$ est

$$\frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt$$
$$= -\sum \frac{C_1 C_2}{2(\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k)} [\sin(\psi + \chi + \omega_1 + \omega_2) + \sin(\psi - \chi + \omega_1 - \omega_2)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C_2}{2(\alpha n_i + \beta n_j)} [\sin(\psi + \chi + \omega_1 + \omega_2) - \sin(\psi - \chi + \omega_1 - \omega_2)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C'_2 t}{2(\alpha n_i + \beta n_j)} [\sin(2\psi + \omega_1 + \omega_3) + \sin(\omega_1 - \omega_3)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C'_2}{2(\alpha n_i + \beta n_j)^2} [\cos(2\psi + \omega_1 + \omega_2) - \cos(\omega_1 - \omega_3)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C'_2 t}{2(\alpha n_i + \beta n_j)} [\sin(2\psi + \omega_1 + \omega_3) + \sin(\omega_3 - \omega_1)].$$

Dans les deux premières lignes, on pourra avoir des termes séculaires si $\psi+\chi=0$ ou $\psi-\chi=0$, c'est-à-dire si l'on a

$$(\alpha+\alpha')\,n_i+(\beta+\beta')n_j+\gamma' n_k=0$$
ou
$$(\alpha-\alpha')\,n_i+(\beta-\beta')n_j-\gamma' n_k=0\,;$$

mais, dans la nature, ces conditions ne sont jamais remplies, si ce n'est lorsque l'on a en même temps

$$\alpha+\alpha'=0,\ \beta+\beta'=0,\ \gamma'=0,$$
ou
$$\alpha-\alpha'=0,\ \beta-\beta'=0,\ \gamma'=0,$$

et alors les deux termes séculaires formés s'annulent mutuellement.

Les trois dernières lignes renferment trois termes séculaires, dont deux se détruisent ; mais il en reste encore un, qui est

$$\frac{C_1C'_2}{2\,(\alpha n_i+\beta n_j)^2}\cos(\omega_1-\omega_3)\,; \tag{20}$$

donc le premier des termes (19) renferme un terme séculaire du troisième ordre.

Cependant on ne peut pas encore affirmer que l'expression du demi-grand axe renferme des termes séculaires de cet ordre ; pour pouvoir le faire, il faut prouver que le terme (20) n'est pas détruit par d'autres termes séculaires qui se trouveraient dans les parties non encore examinées de $\frac{da_i}{dt}$. Or je vais démontrer que ces parties ne sont composées que de termes périodiques.

Et d'abord, dans le dernier terme de l'expression (19), on a

$$V'_i\left(\int V'_i dt\right)^2=\frac{1}{3}\,\frac{d.\left(\int V'_i dt\right)^3}{dt}.$$

Comme V'_i n'est composé que de termes périodiques du premier ordre, $(\int V'_i\,dt)^3$ ne peut renfermer que des termes périodiques ou des termes constants ; mais ces derniers disparaîtront par la différentiation.

20. Il reste à examiner le terme $-\frac{2M_iV'_i}{n_ia_i}$, et en particulier $M_iV'_i$, puisque l'autre facteur est constant.

Avant d'aller plus loin et pour simplifier, je ferai un changement des constantes arbitraires choisies au n° 10, que je remplacerai par les valeurs initiales des coordonnées et de leurs dérivées premières par rapport au temps. L'avantage de ce changement consiste en ce que, dans les équations analogues à (9), relatives aux nouvelles constantes arbitraires, tous les coefficients des dérivées partielles de R_i, qui se trouvent dans le second membre, seront égaux à zéro, à $+1$ ou à -1, ce qui nous dispensera de chercher leurs variations.

En effet, on sait que les équations qui donnent les variations des constantes arbitraires ont la forme générale suivante, qui leur a été donnée par Poisson :

$$\frac{da_i}{dt} = (a_i, b_i)\frac{\partial R_i}{\partial b_i} + (a_i, c_i)\frac{\partial R_i}{\partial c_i} + \dots ;$$

on sait, de plus, que les coefficients (a_i, b_i), (a_i, c_i), ... sont de simples fonctions des constantes arbitraires, indépendantes du temps, et qu'ils ont la forme

$$(a_i, b_i) = \frac{\partial a_i}{\partial \xi_i}\frac{\partial b_i}{\partial \xi_i'} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi_i'}\frac{\partial b_i}{\partial \xi_i} + \frac{\partial a_i}{\partial \eta_i}\frac{\partial b_i}{\partial \eta_i'} - \frac{\partial a_i}{\partial \eta_i'}\frac{\partial b_i}{\partial \eta_i} + \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_i}\frac{\partial b_i}{\partial \zeta_i'} - \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_i'}\frac{\partial b_i}{\partial \zeta_i}$$

Supposons maintenant que les équations du mouvement elliptique aient donné les intégrales

$$\xi_i = a_i + \varphi_i(t),\quad \eta_i = b_i + \psi_i(t),\quad \zeta_i = c_i + \chi_i(t),$$
$$\xi_i' = a_i' + \varphi_i'(t),\quad \eta_i' = b_i' + \psi_i'(t),\quad \zeta_i' = c_i' + \chi_i'(t),$$

a_i, b_i, c_i, a_i', b_i', c_i' étant des constantes arbitraires et $\varphi_i(t)$, $\varphi_i'(t)$, $\psi_i(t)$, ... des fonctions du temps qui s'annulent pour $t = 0$; pour cette époque particulière, on aura donc

$$(a_i, a_i') = -(a_i', a_i) = 1,\ (b_i, b_i') = -(b_i', b_i) = 1,\ (c_i, c_i') = -(c_i', c_i) = 1 ;$$

toutes les autres combinaisons seront nulles. Or, comme ces coefficients sont indépendants du temps, ils conserveront ces mêmes valeurs pour toutes les valeurs de t, et, par conséquent, les différentielles des nouvelles constantes arbitraires seront données par les équations

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{da_i}{dt} = M_i\dfrac{\partial V}{da_i'}, & \dfrac{db_i}{dt} = M_i\dfrac{\partial V}{\partial b_i'}, & \dfrac{dc_i}{dt} = M_i\dfrac{\partial V}{\partial c_i'}, \\ \dfrac{da_i'}{dt} = -M_i\dfrac{\partial V}{\partial a_i}, & \dfrac{db_i}{dt} = -M_i\dfrac{\partial V}{\partial b_i}, & \dfrac{dc_i'}{dt} = -M_i\dfrac{\partial V}{\partial c_i}. \end{cases}$$

21. Formons maintenant l'expression de $M_i V_i'$ jusqu'au troisième ordre, en faisant varier en même temps les éléments

de la planète troublée, ainsi que ceux des planètes perturbatrices ; on aura ainsi

$$(22)\quad M_i V_i' = (M_i V_i')_0 + M_i \delta V_i'$$

$$= (M_i V_i')_0 + M_i \left\{ \frac{\partial V_i'}{\partial \rho_1} \delta\rho_i + \frac{\partial V_i'}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial V_i'}{\partial a_i'} \delta a_i' + \dots \right.$$

$$+ \frac{\partial V_i'}{\partial \rho_j} \delta\rho_j + \frac{\partial V_i'}{\partial a_j} \delta a_j + \frac{\partial V_i'}{\partial a_j'} \delta a_j' + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_i^2} \delta\rho_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i^2} \delta a_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial\ V_i'}{\partial a_i'^2} \delta a_i'^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j^2} \delta\rho_j^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_j^2} \delta a_j^2 + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_i \partial a_i} \delta\rho_i \delta a_i + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_i \partial a_i'} \delta\rho_i \delta a_i' + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i \partial a_i'} \delta a_i \delta a_i' + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i \partial b_i} \delta a_i \delta b_i + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j \partial a_j} \delta\rho_j \delta a_j + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j \partial a_j'} \delta\rho_j \delta a_j' + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_j \partial a_j'} \delta a_j \delta a_j' + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_j \partial b_j} \delta a_j \delta b_j + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \delta\rho_i \delta\rho_j + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_i \partial a_j} \delta\rho_i \delta a_j + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_i \partial a_j'} \delta\rho_i \delta a_j' + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i \partial a_j} \delta a_i \delta a_j + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i \partial a_j} \delta a_i \delta a_j' + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j \partial a_i} \delta\rho_j \delta a_i + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j \partial a_i'} \delta\rho_j \delta a_i' + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i' \partial a_j'} \delta a_i' \delta a_j' + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i' \partial a_j} \delta a_i' \delta a_j + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j \partial \rho_k} \delta\rho_j \delta\rho_k + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j \partial a_k} \delta\rho_j \delta a_k + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_j \partial a_k'} \delta\rho_j \delta a_k' + \dots$$

$$\left. + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_j \partial a_k} \delta a_j \delta a_k + \frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_j \partial a_k'} \delta a_j \delta a_k' + \dots \right\}.$$

Il est inutile d'aller au delà des termes du second ordre par rapport aux variations δ, puisque ces variations sont du premier ordre par rapport aux masses, ainsi que $M_i V'_i$. De plus, il suffira de prendre les parties du premier et du second ordre des δ dans les termes du premier ordre par rapport à ces variations, et seulement celles du premier dans les termes du second ordre. Les constantes arbitraires doivent être considérées comme des constantes absolues dans tous les coefficients des variations ; d'où il résulte déjà que le terme $(M_i V'_i)_0$, dans lequel on supprime les parties d'ordre supérieur au troisième, est périodique.

22. Les termes du premier ordre des variations se déduisent des équations (21) et de

$$\frac{d^2\rho_i}{dt^2} = \frac{3M_i}{a_i^2} V'_i, \tag{23}$$

ainsi que de leurs analogues pour les autres planètes ; ce sont

$$(24)\left\{\begin{array}{l} \delta\rho_i = \dfrac{3M_i}{a_i^2}\displaystyle\int\!\!\int V'_i dt^2, \quad \delta a_i = M_i \int \frac{\partial V}{\partial a'_i}\, dt. \quad \delta a'_i = -M_i \int \frac{\partial V}{\partial a_i} dt, \ \ldots, \\ \delta\rho_j = \dfrac{3M_j}{a_j^2}\displaystyle\int\!\!\int V'_j dt^2, \quad \delta a_j = M_j \int \frac{\partial V}{\partial a'_j}\, dt, \quad \delta a'_j = -M_j \int \frac{\partial V}{\partial a_j} dt, \ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \ldots, \end{array}\right.$$

Pour avoir les termes du premier et du second ordre des mêmes variations, il faudra prendre les variations du premier ordre des seconds membres des équations (23) et (21) par rapport à tous les éléments des planètes considérées, et intégrer. Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_i^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_i^2} = V''_i, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_j^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_j^2} = V''_j, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_i \partial \rho_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = V''_{ij},$$

l'équation (23) donnera

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho_i}{dt^2} &= \frac{3\,M_i}{a_i^2} V'_i + 3\,M_i V'_i \delta \frac{1}{a_i^2} + \frac{3\,M_i}{a_i^2} \partial V'_i \\ &= \frac{3\,M_i}{a_i^2} V'_i + \frac{12\,M_i^2 V'_i}{n_i a_i^4} \int V'_i dt \\ &\quad + \left(\frac{3M_i}{a_i^2}\right)^2 V''_i \int\!\!\int V'_i dt^2 + \frac{3M_i^2}{a_i^2}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}\int \frac{\partial V}{\partial a'_i}\, dt - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int \frac{\partial V}{\partial a_i} dt + \ldots\right) \\ &\quad + \frac{3\,M_i}{a_i^2}\frac{3M_j}{a_j^2} V''_{ij} \int\!\!\int V'_j dt^2 + \frac{3\,M_i M_j}{a_i^2}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_j}\int \frac{\partial V}{\partial a'_j}\, dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\int \frac{\partial V}{\partial a_j}\, dt + \ldots,\right) + \ldots. \end{aligned}$$

et intégrant

$$
(25)\left\{
\begin{aligned}
\delta\rho_i = {} & \frac{3M_i}{a_i^2}\iint V_i' dt^2 + \frac{12M_i^2}{n_i a_i^4}\iint (V_i' dt^2 \int V_i' dt) \\
& + \left(\frac{3M_i}{a_i^2}\right)^2 \iint (V_i'' dt^2 \iint V_i' dt^2) + \frac{3M_i^2}{a_i^2}\iint\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt - \right. \\
& \left. - \frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt^2 \\
& + \frac{3M_i}{a_i^2}\frac{3M_i}{a_j^2}\iint (V_{ij}'' dt^2 \iint V_j' dt^2) + \frac{3M_i M_j}{a_i^2}\iint\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j'}dt - \right. \\
& \left. - \frac{\partial V_i'}{\partial a_j'}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt^2 + \dots \\
& \text{On trouvera de même} \\
\delta\rho_j = {} & \frac{3M_j}{a_j^2}\iint V_j' dt^2 + \frac{12M_j^2}{n_j a_j^4}\iint (V_j' dt^2 \int V_j' dt) \\
& + \left(\frac{3M_j}{a_j^2}\right)^2 \iint (V_j'' dt^2 \iint V_j' dt^2) + \frac{3M_j^2}{a_j^2}\iint\left(\frac{\partial V_j'}{\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j'}dt - \right. \\
& \left. - \frac{\partial V_j'}{\partial a_j'}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt^2 \\
& + \frac{3M_j}{a_j^2}\frac{3M_i}{a_i^2}\iint (V_{ij}'' dt^2 \iint V_i' dt^2) + \frac{3M_i M_j}{a_j^2}\iint\left(\frac{\partial V_j'}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt - \right. \\
& \left. - \frac{\partial V_j'}{\partial a_i'}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt^2 + \dots, \\
\delta a_i = {} & M_i\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt + \frac{3M_i^2}{a_i^2}\int\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}dt\iint V_i' dt^2\right) \\
& + M_i^2\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i'\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a_i'^2}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt \\
& + \frac{3M_i M_j}{a_j^2}\int\left(\frac{\partial V_j'}{\partial a_i'}dt\iint V_j' dt^2\right) + M_i M_j\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i'\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j'}dt - \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 V}{\partial a_i'\partial a_j'}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt + \dots,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(25)\left\{
\begin{aligned}
\delta a_j ={}& \mathrm{M}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}\, dt + \frac{3\mathrm{M}_j^2}{\mathrm{a}_j^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial a'_j}\, dt \int\!\!\int \mathrm{V}'_j dt^2 \right) \\
&+ \mathrm{M}_j^2 \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a'_j \partial a_j} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}\, dt - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a'^2_j} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_j}\, dt + \ldots \right) dt \\
&+ \frac{3\mathrm{M}_j \mathrm{M}_i}{\mathrm{a}_j^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\, dt \int\!\!\int \mathrm{V}'_i dt^2 \right) + \mathrm{M}_j \mathrm{M}_i \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a'_j \partial a_i} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}\, dt - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a'_j \partial a'_i} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i}\, dt + \ldots \right) dt + \ldots, \\
\delta a'_i ={}& -\mathrm{M}_i \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i}\, dt - \frac{3\,\mathrm{M}_i^2}{\mathrm{a}_i^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_i}\, dt \int\!\!\int \mathrm{V}'_i dt^2 \right) \\
&- \mathrm{M}_i^2 \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i^2} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}\, dt - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i \partial a'_i} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i}\, dt + \ldots \right) dt \\
&- \frac{3\,\mathrm{M}_i \mathrm{M}_j}{\mathrm{a}_j^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial a_i}\, dt \int\!\!\int \mathrm{V}'_j dt^2 \right) - \mathrm{M}_i \mathrm{M}_j \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i \partial a_j} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}\, dt - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i \partial a'_j} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_j}\, dt + \ldots \right) dt - \ldots, \\
\delta a'_j ={}& -\mathrm{M}_j \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_j}\, dt - \frac{3\mathrm{M}_j^2}{\mathrm{a}_j^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial a_j}\, dt \int\!\!\int \mathrm{V}'_j dt^2 \right) \\
&- \mathrm{M}_j^2 \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_j^2} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}\, dt - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_j \partial a'_j} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_j}\, dt + \ldots \right) dt \\
&- \frac{3\,\mathrm{M}_j \mathrm{M}_i}{\mathrm{a}_i^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_j}\, dt \int\!\!\int \mathrm{V}'_i dt^2 \right) - \mathrm{M}_j \mathrm{M}_i \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_j \partial a_i} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}\, dt - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_j \partial a'_i} \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i}\, dt + \ldots \right) dt - \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Dans les seconds membres de toutes ces variations, du premier et du second ordre, il faut considérer les constantes arbitraires comme des constantes absolues.

23. Il s'agit maintenant de substituer toutes ces valeurs dans l'expression (22) et de démontrer que tous les termes du troisième ordre qui en résultent sont périodiques ou nuls. Cette opération ne laisse pas d'être assez délicate, a cause du grand

nombre de termes que l'on a à considérer. Je les partagerai en cinq classes, que j'examinerai l'une après l'autre.

Prenons d'abord les termes qui sont du second ordre par rapport à $M_i V$ et à ses dérivées ; ce sont

$$(26)\qquad +\frac{3M_i^2}{a_i^2}\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_i}\iint V_i' dt^2+M_i^2\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt-\frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt+\ldots\right)$$
$$+\frac{3M_jM_i}{a_j^2}\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_j}\iint V_j' dt^2+M_iM_j\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j'}dt-\frac{\partial V_i'}{\partial a_j'}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt+\ldots\right)+\ldots$$

Réduisons $M_i V_i'$ aux seuls termes qui contiennent les angles dont l'expression générale est

$$\psi=\alpha l_i+\beta l_j \quad \text{et} \quad \chi=\alpha' l_i+\beta' l_j+\gamma' l_k,$$

en négligeant ceux qui sont d'un ordre supérieur au second ; on a alors

$$M_iV_i'=C_1\sin(\psi+\omega_1)+C_2\sin(\chi+\omega_2),$$

C_1 étant du premier et C_2 du second ordre par rapport aux masses ; par suite,

$$M_i^2\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_i}\iint V_i' dt^2=[\alpha C_1\cos(\psi+\omega_1)+\alpha' C_2\cos(\chi+\omega^2)]$$
$$\times\iint[C_1\sin(\psi+\omega_1)+C_2\sin(\chi+\omega_2)]\,dt^2.$$

Je néglige le terme du second ordre, qui est périodique et celui du quatrième ; ceux du troisième ordre sont

$$\alpha C_1\cos(\psi+\omega_1)\iint C_2\sin(\chi+\omega_2)\,dt^2$$
$$=-\frac{\alpha C_1C_2}{(\alpha' n_i+\beta' n_j+\gamma' n_k)^2}\cos(\psi+\omega_1)\sin(\chi+\omega_2)$$
$$=-\frac{\alpha C_1C_2}{2(\alpha' n_i+\beta' n_j+\gamma' n_k)^2}[\sin(\psi+\chi+\omega_1+\omega_2)+\sin(\chi-\psi+\omega_2-\omega_1)],$$

$$\alpha' C_2\cos(\chi+\omega_2)\iint C_1\sin(\psi+\omega_1)dt^2$$
$$=-\frac{\alpha' C_1C_2}{(\alpha n_i+\beta n_j)^2}\cos(\chi+\omega_2)\sin(\psi+\omega_1)$$
$$=-\frac{\alpha' C_1C_2}{2(\alpha n_i+\beta n_j)^2}[\sin(\psi+\chi+\omega_1+\omega_2)+\sin(\psi-\chi+\omega_1-\omega_2)].$$

Dans ces deux expressions, les termes séculaires ne peuvent prendre naissance que si l'on a

$$(\alpha+\alpha')n_i+(\beta+\beta')n_j+\gamma' n_k=0$$

ou

$$(\alpha-\alpha')n_i+(\beta-\beta')n_j-\gamma' n_k=0.$$

Or, dans la nature, ces conditions ne sont jamais remplies que si l'on a séparément

$$\alpha+\alpha'=0,\quad \beta+\beta'=0,\quad \gamma'=0$$

ou

$$\alpha-\alpha'=0,\quad \beta-\beta'=0,\quad \gamma'=0,$$

et les termes non périodiques que l'on forme ainsi s'annulent mutuellement.

Si l'on pose

$$M_j V'_j = C_1 \sin(\psi+\omega_1)+C_2\sin(\chi+\omega_2),$$

on verra aussi que le terme

$$\frac{3M_jM_i}{a_j^2}\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j}\iint V'_j\, dt^2$$

est périodique.

Prenons maintenant les termes

$$M_i^2\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt-\frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt\right),$$

et posons

$$M_iV=C_1\sin(\psi+\omega_1)+C_2\sin(\lambda+\omega_2);$$

on aura alors

$$M_i^2\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt=-\left[\alpha\frac{\partial C_1}{\partial a_i}\cos(\psi+\omega_1)+\alpha'\frac{\partial C_2}{\partial a_i}\cos(\chi+\omega_2)\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{\alpha n_i+\beta n_j}\frac{\partial C_1}{\partial a'_i}\cos(\psi+\omega_1)+\frac{1}{\alpha' n_i+\beta' n_j+\gamma' n_k}\frac{\partial C_2}{\partial a'_i}\cos(\chi+\omega_2)\right],$$

$$M_i^2\frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt=-\left[\alpha\frac{\partial C_1}{\partial a'_i}\cos(\psi+\omega_1)+\alpha'\frac{\partial C_2}{\partial a'_i}\cos(\chi+\omega_2)\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{\alpha n_i+\beta n_j}\frac{\partial C_1}{\partial a_i}\cos(\psi+\omega_1)+\frac{1}{\alpha' n_i+\beta' n_j+\gamma' n_k}\frac{\partial C_2}{\partial a_i}\cos(\chi+\omega_2)\right].$$

Les termes du second ordre, ainsi que ceux du quatrième, se détruisent dans ces deux expressions ; si on les supprime, les valeurs précedentes se réduisent a

$$M_i^2\frac{\partial V_i'}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt=-\frac{\alpha}{\alpha' n_i+\beta' n_j+\gamma' n_k}\frac{\partial C_1}{\partial a_1}\frac{\partial C_2}{\partial a_i'}\cos(\psi+\omega_1)\times$$

$$\cos(\chi+\omega_2)-\frac{\alpha'}{\alpha n+\beta n_j}\frac{\partial C_2}{\partial a_i}\frac{\partial C_1}{\partial a_i'}\cos(\psi+\omega_1)\cos(\chi+\omega_2),$$

$$M_i^2\frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt=-\frac{\alpha}{\alpha' n_i+\beta' n_j+\gamma' n_k}\frac{\partial C_1}{\partial a_i'}\frac{\partial C_2}{\partial a_i}\cos(\psi+\omega_1)\cos(\chi+\omega_2)$$

$$-\frac{\alpha'}{\alpha n_i+\beta n_j}\frac{\partial C_2}{\partial a_i'}\frac{\partial C_1}{\partial a_i}\cos(\psi+\omega_1)\cos(\chi+\omega_2).$$

Elles pourraient contenir des termes non périodiques si l'on avait la relation

$$(\alpha+\alpha')n_i+(\beta+\beta')n_j+\gamma' n_k=0$$

ou

$$(\alpha-\alpha')n_i+(\beta-\beta')n_j-\gamma' n_k=0;$$

mais, pour cela, il faut avoir simultanément

$$\alpha+\alpha'=0,\ \beta+\beta'=0,\ \gamma'=0$$

ou

$$\alpha-\alpha'=0,\ \beta-\beta'=0,\ \gamma'=0,$$

et alors les termes séculaires qui prendraient naissance se détruiraient dans l'expression

$$M_i^2\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt-\frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt\right).$$

On verra de même que, dans toutes les autres parties restantes de (26), les termes séculaires s'annulent mutuellement.

24. En second lieu, je considère les termes de $M_i\delta V'_i$ qui sont du troisième ordre et qui ne contiennent que les variations des éléments de m_i ; ce sont

$$(27)\quad M_i\left(\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_i}\delta\rho_i+\frac{\partial V_i'}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}\delta a_i'+\ldots+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i'}{\partial \rho_i^2}\delta\rho_i^2\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i^2}\delta a_i^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i'^2}\delta a_i'^2+\ldots+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_i\partial a_i}\delta\rho_i\,\delta a_i$$

$$+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial\rho_i\partial a_i'}\delta\rho_i\,\delta a_i'+\ldots+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i\partial a_i'}\delta a_i\delta a_i'$$

$$\left.+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i\partial b_i}\delta a_i\delta b_i+\ldots\right).$$

Dans cette expression, ainsi que dans les autres parties de $M_i\delta V'_i$, que nous aurons encore à examiner par la suite, il suffit de prendre pour $M_i V$ seulement les termes du premier ordre par rapport aux masses; puis, ainsi qu'il a été dit au n° 21, il faudra substituer à la place des δ les valeurs (24) dans les termes du second ordre par rapport aux δ; pour ceux du premier ordre, on doit prendre dans (25) les deux premières lignes de $\delta\rho_i$ et la première seulement de δa_i, $\delta a'_i, \ldots, \delta c'_i$, sauf le premier terme de chacune de ces valeurs. Les termes que l'on obtient ainsi peuvent être partagés en cinq catégories, que je désignerai par des notations particulières; ce sont

$$
(28)\left\{
\begin{aligned}
&A^{(i)}=\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_i}\int\!\!\int(V'_i\,dt^2\int V'_i\,dt),\\
&B^{(i)}=\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_i}\int\!\!\int(V''_i\,dt^2\int\!\!\int V'_i\,dt^2)\pm\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_i^2}\,(\int\!\!\int V'_i\,dt^2)^2,\\
&(da_i,da'_i)^{(i)}=\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_i}\int\!\!\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}dt^2\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}\,dt\right)\\
&\quad-\frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}dt\int\!\!\int V'_i\,dt^2\right)+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_i\partial a_i}\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}\,dt\right)(\int\!\!\int V'_i\,dt^2),\\
&(da_i\,da'_i,da_i,da'_i)=\frac{\partial^2 V'_i}{da_i\,\partial a'_i}\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}\,dt\right)\left(\int\frac{\partial V}{\partial a_i}\,dt\right)\\
&\quad-\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\,\partial a'_i}dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt\right)-\frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\,\partial a'_i}dt\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt\right),\\
&(da_i^2,da'_i)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i^2}\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt\right)^2-\frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2}dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Des trois dernières de ces combinaisons, on en peut déduire d'autres par de simples changements de lettres. A l'aide de ces notations, l'expression (27) peut être écrite sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(29)\quad &+\frac{12M_i^3}{n_i a_i^4}A^{(i)}+M_i\left(\frac{3M_i}{a_i^2}\right)^2B^{(i)}\\
&+\frac{3M_i^3}{a_i^2}\,[(da_i,\,da'_i)^{(i)}+(db_i,db'_i)^{(i)}+(dc_i,\,dc'_i)^{(i)}-(da'_i,\,da_i)^{(i)}\\
&\qquad-(db'_i,\,db_i)^{(i)}-(dc'_i,\,dc_i)^{(i)}]
\end{aligned}
$$

$$+ M_i^3[(da_i db_i,\ db'_i, da'_i) + (da_i dc_i,\ dc'_i da'_i) + (db_i dc_i,\ dc'_i,\ db'_i)$$
$$+ (da'_i\, db'_i\, db_i,\ da_i) + (da'_i dc'_i, dc_i, da_i) + (db'_i\, dc'_i,\ dc_i,\ db_i)$$
$$-(da_i da'_i,\ da_i,\ da'_i) - (da_i db'_i, db_i, da'_i) - (da_i\, dc'_i,\ dc_i,\ da'_i)$$
$$-(db_i\, da'_i, da_i,\ db'_i) - (db_i db'_i, db_i, db'_i) - (db_i\, dc'_i,\ dc_i,\ db'_i)$$
$$-(dc_i\, da'_i,\ da_i,\ dc'_i) - (dc_i db'_i,\ db_i, dc'_i) - (dc_i dc'_i,\ dc_i\, dc'_i)]$$
$$+ M_i^3[(da_i^2,\ da'_i) + (db_i^2,\ db'_i) + (dc_i^2,\ dc'_i) + (da'^2_i,\ da_i)$$
$$+ (db'^2_i,\ db_i) + (dc'^2_i,\ dc_i)].$$

25. Je passe aux termes de $M_i \delta V'_i$ qui sont du troisième ordre et dont chacun ne renferme que des variations relatives à une seule des planètes perturbatrices ; ce sont

$$(30)\quad M_i\left(\frac{dV'_i}{\partial\rho_j}\delta\rho_j + \frac{\partial V'_i}{\partial a_j}\delta a_j + \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\delta a'_j + \frac{\partial V'_i}{\partial b_j}\delta b_j + \dots\right.$$
$$+ \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_k}\delta\rho_k + \dots + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j^2}\delta\rho_j^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j^2}\delta a_j^2$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a'^2_j}\delta a'^2_j + \dots + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_k^2}\delta\rho_k^2 + \dots$$
$$+ \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial a_j}\delta\rho_j\,\delta a_j + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\,\partial a'_j}\delta\rho_j\delta a'_j + \dots + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j\partial a'_j}\delta a_j\delta a'_j$$
$$\left. + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j \partial b_j}\delta a_j \delta b_j + \dots + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_k\,\partial a_k}\delta\rho_k\,\delta a_k + \dots\right).$$

Je fais les substitutions exactement comme au numéro précédent ; j'adopte encore les notations

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l}
A^{(j)} = \dfrac{\partial V'_i}{\partial\rho_j}\displaystyle\int\!\!\int (V'_j dt^2 \int V'_j dt),\\[2ex]
B^{(j)} = \dfrac{\partial V'_i}{\partial\rho_j}\displaystyle\int\!\!\int (V'_j dt^2 \int\!\!\int V'_j dt^2) + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j^2}\left(\int\!\!\int V'_j dt^2\right)^2,\\[2ex]
(da_j,\ da'_j)^{(j)} = \dfrac{\partial V'_i}{\partial\rho_j}\displaystyle\int\!\!\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_j}dt^2\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}\,dt\right)\\[2ex]
\qquad - \dfrac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\displaystyle\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_j}\,dt\int\!\!\int V'_j dt^2\right) + \dfrac{\partial\ V'_i}{\partial\rho_j\partial a_j}\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}\,dt\right)\left(\int\!\!\int V'_j dt^2\right),\\[2ex]
(da_j da'_j,\ da_j,\ da'_j) = \dfrac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j \partial a'_j}\left(\displaystyle\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}\,dt\right)\left(\int\frac{\partial V}{\partial a_j}\,dt\right)\\[2ex]
- \dfrac{\partial V'_i}{\partial a_j}\displaystyle\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\,\partial a'_j}\,dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}\,dt\right) - \dfrac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\left(\int\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\partial a'_j}\,dt\int\frac{\partial V}{\partial a_j}\,dt\right),\\[2ex]
(da_j^2,\ da'_j) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j^2}\left(\displaystyle\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}\,dt\right)^2 - \dfrac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\left(\int\frac{\partial^2 V}{\partial a_j^2}\,dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}\,dt\right).
\end{array}\right.$$

On peut former d'autres symboles par des changements de lettres dans les trois derniers. La quantité (30) prend la forme suivante :

$$(32)\quad +\frac{12\,M_j^2\,M_i}{n_j a_j^4}A^{(j)}+\ldots+\left(\frac{3\,M_j}{a_j^2}\right)^2 M_i B^{(j)}+\ldots$$

$$+\frac{3\,M_j^2 M_i}{a_j^2}\,[(da_j,\ da_j')^{(j)}+(db_j,\ db_j')^{(j)}+(dc_j,\ dc_j')^{(j)}-(da_j',\ da_j)^{(j)}$$
$$-(db_j',\ db_j)^{(j)}-(dc_j',\ dc_j)^{(j)}]+\ldots$$

$$+M_j^2 M_i[(da_j db_j,\ db_j',\ da_j')+(da_j dc_j,\ dc_j',\ da_j')+(db_j dc_j,\ dc_j',\ db_j')$$
$$+(da_j' db_j',\ db_j, da_j)+(da_j' dc_j',\ dc_j,\ da_j)+(db_j' dc_j',\ dc_j,\ db_j)$$
$$-(da_j da_j',\ da_j,\ da_j')-(da_j db_j',\ db_j,\ da_j')-(da_j dc_j',\ dc_j, da_j')$$
$$-(db_j da_j',\ da_j,\ db_j')-(db_j db_j',\ db_j,\ db_j')-(db_j dc_j',\ dc_j,\ db_j')$$
$$-(dc_j da_j',\ da_j,\ dc_j')-(dc_j db_j',\ db_j,\ dc_j')-(dc_j dc_j',\ dc_j,\ dc_j')]+\ldots$$

$$+M_j^2 M_i[(da_j^2,\ da_j')+(db_j^2,\ db_j')+dc_j^2,\ dc_j')+(da_j'^2,\ da_j)+(db_j'^2,\ db_j)$$
$$+(dc_j'^2,\ dc_j)]+\ldots$$

26. Occupons-nous des termes de $M_i\delta V_i'$, qui continnent en même temps la variation d'un élément de la planète troublée et celle d'un élément d'une quelconque des planètes perturbatrices. Ils constituent la quantité suivante :

$$+M_i\left(\frac{\partial^2 V_i'}{\partial\rho_i\partial\rho_j}\delta\rho_i\delta\rho_j+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial\rho_i\partial a_j}\delta\rho_i\delta a_j+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial\rho_i\partial a_j'}\delta\rho_i\delta a_j'+\ldots\right.$$
$$+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial\rho_j\partial a_i}\delta\rho_j\delta a_i+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial\rho_j\partial a_i'}\delta\rho_j\delta a_i'+\ldots$$
$$+\frac{\partial\ V_i'}{\partial a_i\partial a_j}\delta a_i\delta a_j+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_i\partial a_j'}\delta a_i\delta a_j'+\ldots$$
$$\left.+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_j\partial a_i'}\delta a_j\delta a_i'+\frac{\partial^2 V_i'}{\partial a_j'\partial a_i'}\delta a_j'\delta a_j'+\ldots\right)+\ldots$$

Il faut y adjoindre la quantité

$$+M_i\left(\frac{\partial V_i'}{\partial\rho_i}\delta\rho_i+\frac{\partial V_i'}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}\delta a_i'+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{\partial V_i'}{\partial\rho_j}\delta\rho_j+\frac{\partial V_i'}{\partial a_j}\delta a_j+\frac{\partial V_i'}{\partial a_j'}\delta a_j'+\ldots+\frac{\partial V_i'}{\partial\rho_k}\delta\rho_k+\ldots\right),$$

dans laquelle on remplace $\delta\rho_i$, δa_i, $\delta a'_i, \ldots, \delta c'_i$ par les sommes des termes que nous n'avons pas encore considérés dans leurs valeurs [formules (25)]; $\delta\rho_j$, $\delta\rho_k, \ldots$ par les troisièmes lignes, et δa_j, $\delta a'_j, \ldots, \delta a_k$, $\delta a'_k, \ldots$ par les secondes lignes de leurs valeurs respectives. Je pose

$$
(33)\left\{
\begin{aligned}
B^{(ij)} &= \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i} \int\!\!\int (V''_{ij}\, dt^2 \int\!\!\int V'_j\, dt^2) + \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j} \int\!\!\int (V''_{ij} dt^2 \int\!\!\int V'_i dt^2) \\
&\quad + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i \partial \rho_j} (\int\!\!\int V'_i dt^2)(\int\!\!\int V'_j dt^2), \\
(da_j, da'_j)^{(i)} &= \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i} \int\!\!\int \left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_j} dt^2 \int \frac{\partial V}{\partial a'_j} dt \right) - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j} \int \left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_j} dt \int\!\!\int V'_i dt^2 \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i \partial a_j} (\int\!\!\int V'_i\, dt^2) \left(\quad \frac{\partial V}{\partial a'_j}\, dt \right), \\
(da_i, da'_i)^{(j)} &= \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j} \int\!\!\int \left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_i} dt^2 \int \frac{\partial V}{\partial a'_i} dt \right) - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i} \int \left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_i} dt \int\!\!\int V'_j dt^2 \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j \partial a_i} (\int\!\!\int V'_j dt^{\cdot}) \left(\int \frac{\partial V}{\partial a'_i}\, dt \right), \\
(da_i da_j, da'_i, da'_j) &= \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i \partial a_j} \left(\int \frac{\partial V}{\partial a'_i}\, dt \right) \left(\int \frac{\partial V}{\partial a'_j}\, dt \right) \\
&\quad - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i} \int \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j}\, dt \int \frac{\partial V}{\partial a'_j}\, dt \right) - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j} \int \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j} dt \int \frac{\partial V}{\partial a'_i} dt \right),
\end{aligned}
\right.
$$

et d'autres notations analogues. L'expression qui nous occupe en ce moment prendra alors la forme

$$
\begin{aligned}
(34)\quad & + \frac{3\,M_i^2}{a_i^2} \left(\frac{3\,M_j}{a_j^2} B^{(ij)} + \frac{3\,M_k}{a_k^2} B^{(ik)} + \ldots \right) \\
& + \frac{3\,M_i^2\,M_j}{a_i^2} [(da_j, da'_j)^{(i)} + (db_j, db'_j)^{(i)} + (dc_j, dc'_j)^{(i)} - (da'_j, da_j)^{(i)} \\
& \qquad - (db'_j, db_j)^{(i)} - (dc'_j, dc_j)^{(i)}] + \ldots \\
& + \frac{3\,M_i^2\,M_j}{a_j^2} [(da_i, da'_i)^{(j)} + (db_i, db'_i)^{(j)} + (dc_i, dc'_i)^{(j)} - (da'_i, da_i)^{(j)} \\
& \qquad - (db'_i, db_i)^{(j)} - (dc'_i, dc_i)^{(j)}] + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ M_i^2 M_j [&(da_i da_j,\, da'_i,\, da'_j) + (da_i db_j,\, da'_i,\, db'_j) + (da_i dc_j,\, da'_i,\, dc'_j) \\
&+ (db_i da_j,\, db'_i,\, da'_j) + (db_i db_j,\, db'_i,\, db'_j) + (db_i dc_j,\, db'_i,\, dc'_j) \\
&+ (dc_i da_j,\, dc'_i,\, da'_j) + (dc_i db_j,\, dc'_i,\, db'_j) + (dc_i dc_j,\, dc'_i,\, dc'_j) \\
&+ (da'_i da'_j,\, da_i,\, da_j) + (da'_i db'_j,\, da_i,\, db_j) + (da'_i dc'_j,\, da_i,\, dc_j) \\
&+ (db'_i da'_j,\, db_i,\, da_j) + (db'_i db'_j,\, db_i,\, db_j) + (db'_i dc'_j,\, db_i,\, dc_j) \\
&+ (dc'_i da'_j,\, dc_i,\, da_j) + (dc'_i db'_j,\, dc_i,\, db_j) + (dc'_i dc'_j,\, dc_i,\, dc_j) \\
&- (da_i da'_j,\, da'_i,\, da_j) - (da_i db'_j,\, da'_i\, db_j) - (da_i dc'_j,\, da'_i,\, dc_j) \\
&- (db_i da'_j,\, db'_i,\, da_j) - (db_i db'_j,\, db'_i,\, db_j) - (db_i dc'_j,\, db'_i,\, dc_j) \\
&- (dc_i da'_j,\, dc'_i,\, da_j) - (dc_i db'_j,\, dc'_i,\, db_j) - (dc_i dc'_j,\, dc'_i,\, dc_j) \\
&- (da'_i da_j,\, da_i,\, da'_j) - (da'_i db_j,\, da_i,\, db'_j) - (da'_i dc_j,\, da_i,\, dc'_j) \\
&- (db'_i da_j,\, db_i,\, da'_j) - (db'_i db_j,\, db_i,\, db'_j) - (db'_i dc_j,\, db_i,\, dc'_j) \\
&- (dc'_i da_j, dc_i, da'_j) - (dc'_i db_j, dc_i, db'_j) - (dc'_i dc_j, dc_i, dc'_j)] + \ldots
\end{aligned}
$$

27. Il reste enfin à examiner les termes de $M_i \delta V'_i$, qui dépendent en même temps des variations des éléments de deux quelconques des planètes perturbatrices. Ces termes proviennent d'abord de la partie

$$
\begin{aligned}
+ M_i \Bigg(&\frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j \partial \rho_k} \delta\rho_j \delta\rho_k + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j \partial a_k} \delta\rho_j \delta a_k + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j \partial a'_k} \delta\rho_j \delta a'_k + \ldots \\
&+ \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_k \partial a_j} \delta\rho_k \delta a_j + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_k \partial a'_j} \delta\rho_k \delta a'_j + \ldots \\
&+ \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j \partial a_k} \delta a_j \delta a_k + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j \partial a'_k} \delta a_j \delta a'_k + \ldots \\
&+ \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_k \partial a'_j} \delta a_k \delta a'_j + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a'_k \partial a'_j} \delta a'_k \delta a'_j + \ldots \Bigg) + \ldots,
\end{aligned}
$$

et ensuite de

$$
+ M_i \left(\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j} \delta\rho_j + \frac{\partial V'_i}{\partial a_j} \delta a_j + \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j} \delta a'_j + \ldots + \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_k} \delta\rho_k + \ldots \right),
$$

lorsqu'on y remplace $\delta\rho_j$, δa_j, $\delta a'_j$, ..., $\delta\rho_k$, ... par les sommes des termes que nous n'avons pas encore employés dans leurs valeurs (25). Posons

$$
(35)\left\{
\begin{aligned}
&B^{(jk)} = \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j}\int\int(V''_{jk}\,dt^2\int\int V'_k dt^2) \\
&\qquad + \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_k}\int\int(V''_{kj}dt^2\int\int V''_j dt^2) + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial\rho_k}(\int\int V'_j dt^2)(\int\int V'_k dt^2), \\
&(da_k,\, da'_k)^{(j)} = \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j}\int\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_k}dt^2\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}\,dt\right) \\
&\qquad - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_k}\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_k}\,dt\int\int V'_j dt^2\right) + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial a_k}(\int\int V'_j dt^2)\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt\right), \\
&(da_j da_k,\, da'_k,\, da'_j) = \frac{\partial^2 V'_j}{\partial a_j\partial a_k}\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}\,dt\right)\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}\,dt\right) \\
&\qquad - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\partial a_k}\,dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt\right) - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_k}\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\partial a_k}\,dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt\right),
\end{aligned}
\right.
$$

et les combinasisons analogues ; alors les termes qu'il nous reste à formuler formeront l'espression suivante :

$$
\begin{aligned}
(36)\quad & + M_i\left(\frac{3\,M_j}{a_j^2}\frac{3\,M_k}{a_k^2}B^{(jk)} + \frac{3\,M_j}{a_j^2}\frac{3\,M_l}{a_l^2}B^{(jl)} + \frac{3\,M_k}{a_k^2}\frac{3\,M_l}{a_l^2}B^{(kl)} + \ldots\right) \\
& + \frac{3\,M_iM_jM_k}{a_j^2}[(da_k,\, da'_k)^{(j)} + (db_k,\, db'_k)^{(j)} + (dc_k,\, dc'_k)^{(j)} - (da'_k,\, da_k)^{(j)} \\
&\quad - (db'_k,\, db_k)^{(j)} - (dc'_k,\, dc_k)^{(j)}] + \ldots \\
& + \frac{3\,M_iM_kM_j}{a_k^2}[(da_j,\, da'_j)^{(k)} + (db_j,\, db'_j)^{(k)} + (dc_j,\, dc'_j)^{(k)} - (da'_j,\, da_j)^{(k)} \\
&\quad - (db'_j,\, db_j)^{(k)} - (dc'_j,\, dc_j)^{(k)}] + \ldots \\
&\qquad + M_iM_jM_k[(da_jda_k,\, da'_k,\, da'_j) + (da_jdb_k,\, db'_h,\, da'_j) \\
&\quad + (da_jdc_k,\, dc'_k,\, da'_j) + (db_jda_k,\, da'_k,\, db'_j) + (db_jdb_k,\, db'_k,\, db'_j) \\
&\quad + (db_jdc_k,\, dc'_k,\, db'_j) + (dc_jda_k,\, da'_k,\, dc'_j) + (dc_jdb_k,\, db'_k,\, dc'_j) \\
&\quad + (dc_jdc_k,\, dc'_k,\, dc'_j) + (da'_jda'_k,\, da_k,\, da_j) + (da'_jdb'_k,\, db_k, da_j) \\
&\quad + (da'_jdc'_k,\, dc_k,\, da_j) + (db'_jda'_k,\, da_k,\, db_j) + (db'_jdb'_k,\, db_k,\, db_j) \\
&\quad + (db'_jdc'_k,\, dc_k,\, db_j) + (dc'_jda'_k,\, da_k,\, dc_j) + (dc'_jdb'_k,\, db_k,\, dc_j) \\
&\quad + (dc'_jdc'_k,\, dc_k,\, dc_j) - (da_jda'_k,\, da_k,\, da'_j) - (da_jdb'_k,\, db_k,\, da'_j) \\
&\quad - (da_jdc'_k,\, dc_k, da'_j) - (db_jda'_k,\, da_k,\, db'_j) - (db_jdb'_k,\, db_k,\, db'_j) \\
&\quad - (db_jdc'_k,\, dc_k, db'_j) - (dc_jda'_k,\, da_k,\, dc'_j) - (dc_jdb'_k,\, db_k,\, dc'_j) \\
&\quad - (dc_jdc'_k,\, dc_k, dc'_j) - (da'_jda_k,\, da'_k,\, da_j) - (da'_jdb_k,\, db'_k\, da_j) \\
&\quad - (da'_jdc_k,\, dc'_k, da_j) - (db'_jda_k,\, da'_k,\, db_j) - (db'_jdb_k,\, db'_k,\, db_j) \\
&\quad - (db'_jdc_k,\, dc'_k, db_j) - (dc'_jda_k,\, da'_k,\, dc_j) - (dc'_jdb_k,\, db'_k,\, dc_j) \\
&\quad - (dc'_jdc_k,\, dc'_k, dc_j)] + \ldots
\end{aligned}
$$

L'expression complète de $M_i\delta V'_i$ se compose de la somme des quantités (26), (29), 32), 34) et (36). Nous avons vu que la première ne renferme pas de termes séculaires du troisième ordre ; les quatre autres sont des fonctions linéaires d'un certain nombre de quantités, qui peuvent se réduire aux dix-sept types compris dans les formules (28), (31), (33), 35). Or ces dernières quantités se ramènent elles-mêmes à huit formes seulement de la manière suivante.

28. Je désigne par P, Q, R trois fonctions qui, comme V, peuvent se développer en séries convergentes de termes procédant suivant les sinus ou les cosinus d'arcs proportionnels au temps, tels que ψ, et je pose, comme pour V,

$$\frac{\partial P}{\partial \rho_i} = P'_i, \quad \frac{\partial P}{\partial \rho_j} = P'_j, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \rho_i^2} = P''_i, \quad \frac{\partial\ P}{\partial \rho_j^2} = P''_j, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \rho_i \partial \rho_j} = P''_{ij},$$

et de même pour Q et R.

Examinons successivement les diverses quantités $A^{(i)}, B^{(i)}, \ldots$

On a d'abord

$$\int\int (V'_i dt^2 \int V'_i dt) = \tfrac{1}{2}\int(\int V'_i dt)^2 dt\,;$$

donc

$$A^{(i)} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i}\int(\int V'_i\, dt)^2 dt\,;$$

et, si l'on pose

$$P = \int V'_i dt,$$

on a

$$(a) \qquad A^{(i)} = \frac{1}{2}\,\frac{dP'_i}{dt}\int P^2 dt.$$

$A^{(j)}$ se ramène exactement à la même forme en posant

$$P = \int V'_j\, dt.$$

Pour transformer $B^{(i)}$, je prends

$$P = \int\int V'_i dt^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i} = \frac{d^2 P'_i}{dt^2}, \quad \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i^2} = \frac{d^2 P''_i}{dt^2}\,;$$

alors

$$(b)\qquad B^{(i)}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}\int\int\left(\frac{d^2P'_i}{dt^2}\,P\,dt^2\right)+\frac{1}{2}\,\frac{d^2P''_i}{dt^2}\,P^2.$$

Pour $B^{(j)}$, on aura aussi

$$P=\int\int V'_j dt^2,\quad V''_j=\frac{d^2P'_j}{dt^2},\quad \frac{\partial V'_j}{\partial\rho_j}=\frac{d^2P'_i}{dt^2},\quad \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j^2}=\frac{d^2P''_{ij}}{dt^2},$$

$$(c)\qquad B^{(j)}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}\int\int\left(\frac{d^2P'_j}{dt^2}\,P\,dt^2\right)+\frac{1}{2}\,\frac{d^2P''_{ij}}{dt^2}\,P^2.$$

$B^{(ij)}$ se transforme d'une manière analogue en posant

$$P=\int\int V'_i dt^2,\quad Q=\int\int V'_j dt^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_i}=\frac{d^2P'_i}{dt^2},\quad V''_{ij}=\frac{d^2P'_j}{dt^2}=\frac{d^2Q'_i}{dt^2},\quad \frac{\partial^2V'_i}{\partial\rho_i\partial\rho_j}=\frac{d_2P''_{ij}}{dt^2}=\frac{d^2Q''_i}{dt^2}\;;$$

d'où il suit

$$(d)\quad B^{(ij)}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}\int\int\frac{d^2Q'_i}{dt^2}\,Q\,dt^2+\frac{d^2Q'_i}{dt^2}\int\int\frac{d^2P'_j}{dt^2}\,P\,dt^2+\frac{d^2Q''_i}{dt^2}\,PQ\;;$$

mais il faut faire attention à la forme particulière que doivent avoir les quantités P et Q dans $B^{(ij)}$. Supposons que l'on réduise en un seul tous les termes de V qui dépendent d'un même argument $\psi=\alpha l_i+\beta l_j$, et prenons

$$V=G\sin(\psi+\omega)\;;$$

on en tire

$$V'_i=G\,\alpha\cos(\psi+\omega),\quad V'_j=G\,\beta\cos(\psi+\omega),$$

et, par conséquent,

$$P=\int\int V'_i dt^2=-\frac{G\alpha}{(\alpha\,\cdot_i+\beta\,\cdot_j)^2}\cos(\psi+\omega),$$

$$Q=\int\int V'_j dt^2=-\frac{G\beta}{(\alpha n_i+\beta n_j)^2}\cos(\psi+\omega).$$

On voit que, si P contient un terme tel que $G\alpha\cos(\psi+\omega)$, Q doit contenir le terme $G\beta\cos(\psi+\omega)$; de plus, tous les termes de P contiennent ρ_i et tous ceux de Q, ρ_j.

On ramène $B^{(jk)'}$ à une forme analogue à (*b*), (*c*), (*d*), en posant

$$P=\int\int V'_j dt^2, \quad Q=\int\int V'_k dt^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V'_i}{d\rho_j}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}, \quad \frac{\partial V'_i}{\partial\rho_k}=\frac{d^2Q'_i}{dt^2}, \quad V''_{jk}=\frac{d^2P'_k}{dt^2}=\frac{d^2Q'_j}{dt^2},$$

$$\frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial\rho_k}=\frac{\partial^2 P''_{ik}}{dt^2}=\frac{d^2Q''_{ij}}{dt^2}$$

ce qui donne

$$(e)\quad B^{(jk)}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}\int\int\frac{d^2Q'_j}{dt^2}Q\,dt^2+\frac{d^2Q'_i}{dt^2}\int\int\frac{d^2P'_k}{dt^2}P\,dt^2+\frac{d^2P''_{ik}}{dt^2}PQ.$$

On verra encore que, si P contient le terme $G\beta\cos(\psi+\omega)$, Q contiendra $G\gamma\cos(\psi+\omega)$, et que tous les termes de P dépendent de ρ_j et ceux de Q de ρ_k.

L'expression $(da., da'_i)^{(i)}$ se transforme en posant

$$P=\int\int V'_i\,dt^2, \quad Q=\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}, \quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt;$$

on a alors

$$(f)\qquad (da_i, da'_i)^{(i)}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}\int\int QR\,dt^2-\frac{dR'_i}{dt}\int QP\,dt+Q'_iPR.$$

C'est encore à la forme (*f*) que l'on ramène les quantités suivantes :

$(da_j, da'_j)^{(j)}$, en posant $P=\int\int V'_j dt^2, \quad Q=\frac{\partial V'_j}{\partial a_j}, \quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt;$

$(da_j, da'_j)^{(i)}$, en posant $P=\int\int V'_i dt^2, \quad Q=\frac{\partial V'_i}{\partial a_j}, \quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt;$

$(da_i, da'_i)^{(j)}$, en posant $P=\int\int V'_j dt^2, \quad Q=\frac{\partial V'_j}{\partial a_i}, \quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt;$

$(da_k, da'_k)^{(j)}$, en posant $P=\int\int V'_j dt^2, \quad Q=\frac{\partial V'_j}{\partial a_k}, \quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt.$

Si l'on prend

$$P=\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt, \quad Q=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt, \quad R\,\frac{\partial_2 V}{\partial a_i\partial a'_i},$$

on aura

$$(g)\quad (da_i\,da'_i, da_i\,da'_i.)=PQR'_i-\frac{dP'_i}{dt}\int QR\,dt-\frac{dQ'_i}{dt}\int PR\,dt.$$

Pour donner cette forme aussi aux expressions $(da_j\, da'_j, da_j, da'_j)$, $(da_i\, da_j, da'_i, da'_j)$, $(da_j da_k, da'_k, da'_j)$, il suffira de poser respectivement

$$P=\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt,\quad Q=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt,\quad R=\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\partial a'_j},$$

$$P=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt,\quad Q=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt,\quad R=\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\partial a_j},$$

$$P=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt,\quad Q=\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt,\quad R=\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\partial a_k}.$$

Enfin on prendra

$$P=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt,\quad R=\frac{\partial^2 V}{\partial a^2_i},$$

et alors on aura la forme

$$(h)\qquad (da^2_i, da'_i)=\tfrac{1}{2}P^2R'_i-\frac{dP'_i}{dt}\int PR\,dt,$$

à laquelle on ramènera aussi (da^2_j, da'_j), en posant

$$P=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt,\quad R=\frac{\partial^2 V}{\partial a^2_j}.$$

Ce qui nous reste à faire maintenant, c'est de démontrer que les huit formes (*a*), (*b*)...., (*h*) ne sont composées que de termes périodiques ; mais, comme (*h*) se déduit de (*g*) en y faisant $P=Q$, il suffit de nous occuper seulement des sept premières.

Je supposerai que, dans les séries qui représentent P, Q, R, on ait réuni en un seul tous les termes qui dépendent d'un même argument ψ, et je poserai, pour abréger l'écriture,

$$\psi+\psi'+\psi''+\omega+\omega'+\omega''=u.$$

29. *Forme* $A^{(i)}$. — Prenons dans le développement de P les trois termes suivants :

$$P=G\cos(\psi+\omega)+G'\cos(\psi'+\omega')+G''\cos(\psi''+\omega'');$$

on sait que G, G' G'', ω, ω', ω'' sont des constantes qui ne renferment pas ε_i, ε_j, . . . , et

$$\psi=\alpha l_i+\beta l_j,\quad \psi'=\alpha' l_i+\beta' l,\quad \psi''=\alpha'' l_i+\beta'' l_j.$$

On tire de là

$$\frac{dP'_i}{dt} = - G\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)\cos(\psi + \omega)$$
$$- G'\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)\cos(\psi' + \omega') - G''\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)\cos(\psi'' + \omega'').$$

Avec ces valeurs, je forme l'expression (a) de $A^{(i)}$ et je réunis tous les termes qui dépendent de $\sin u$; ce sont

$$-\frac{GG'G''}{4}\sin u \times \left[\frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)}{(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j}\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)}{(\alpha + \alpha'')n_i + (\beta + \beta'')n_j} + \frac{\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)}{(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j}\right].$$

Il suffit de considérer ce seul terme, car tous les autres qui résultent de la valeur précédente de P peuvent s'en déduire, en y supposant égales entre elles quelques-unes des constantes G, G', G'' ; $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'', ou bien en changeant leurs signes. Or, pour que ce terme donne lieu à une inégalité séculaire, il faut que u soit indépendant du temps, c'est-à-dire que l'on ait

$$(\alpha + \alpha' + \alpha'')n_i + (\beta + \beta' + \beta'')n_j = 0. \tag{37}$$

Mais, dans la nature, les quantités n_i, n_j, sont toujours incommensurables entre elles ; et, comme $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta'\ \beta''$ sont des nombres entiers, cette équation se décompose en deux autres

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0, \quad \beta + \beta' + \beta'' = 0, \tag{38}$$

et, dans ce cas, le coefficient qui multiplie $-\frac{GG'G''}{4}\sin u$ devient

$$-\alpha - \alpha' - \alpha'' = 0.$$

Les termes constants de $A^{(i)}$ sont donc nuls.

Dans ce calcul, j'ai pris des termes de P qui dépendent des longitudes moyennes des deux mêmes planètes ; mais il conduit au même résultat si les trois termes considérés de P renferment des longitudes moyennes relatives à des planètes différentes ; seulement, dans ce cas, l'équation (37) se décomposerait en un nombre d'équations secondaires égal à celui des planètes dont les moyens mouvements y figurent.

On peut remarquer que $A^{(i)}$ contient aussi des termes de la forme $A\,t\cos(\psi+\omega)$; tel est, par exemple,

$$-\frac{G^3}{4}\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)\,t\cos(\psi+\omega).$$

30. *Forme* $B^{(i)}$. — La même valeur de P donne encore

$$\begin{aligned}\frac{d^2P'_j}{dt^2}&=G\alpha\,(\alpha n_i+\beta n_j)^2\sin(\psi+\omega)+G'\alpha'\,(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2\sin(\psi'+\omega')\\&\quad+G''\alpha''\,(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2\sin(\psi''+\omega''),\\\frac{d^2P''_i}{dt^2}&=G\alpha^2(\alpha n_i+\beta n_j)^2\cos(\psi+\omega)+G'\alpha'^2(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2\cos(\psi'+\omega')\\&\quad+G''\alpha''^2(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2\cos(\psi''+\omega'').\end{aligned}$$

Le terme en $\cos u$ de $B^{(i)}$, que je considère seul, est alors

$$\begin{aligned}\frac{GG'G''}{4}\cos u\times\Bigg\{&\frac{\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)^2[\alpha'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\alpha''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2]}{](\alpha'+\alpha'')n^i+(\beta'+\beta'')n_j]^2}\\&+\frac{\alpha'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2[\alpha''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2+\alpha(\alpha n_i+\beta n_i)^2]}{[(\alpha+\alpha'')n_i+(\beta+(\beta'')n_j]^2}\\&+\frac{\alpha''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2[\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\alpha'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha')n_i+(\beta+\beta')n_j]^2}\\&+\alpha^2(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\alpha'^2(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\alpha''^2(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2\Bigg\}.\end{aligned}$$

Or les conditions (38), nécessaires et suffisantes pour que ce terme soit indépendant du temps, réduisent le coefficient entre crochets à

$$[\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\alpha'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\alpha''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2](\alpha+\alpha'+\alpha''),$$

quantité nulle, à cause de $\alpha+\alpha'+\alpha''=0$; donc $B^{(i)}$, pas plus que $A^{(i)}$, ne donne des termes séculaires.

31. *Forme* $B^{(j)}$. — Un calcul analogue au précédent montrera que le terme en $\cos u$ de $B^{(j)}$ est

$$\frac{GG'G''}{4}\cos u \times \left\{ \frac{\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)^2[\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2]}{[(\alpha'+\alpha'')n_i+(\beta'+\beta'')n_j]^2} \right.$$

$$+\frac{\alpha'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2[\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha'')n_i+(\beta+\beta'')n_j]^2}$$

$$+\frac{\alpha''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2[\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha')n_i+(\beta+\beta')n_j]^2}$$

$$\left. +\alpha\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\alpha'\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\alpha''\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2 \right\},$$

et le coefficeint entre crochets devient, par les relations (38),

$$[\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2](\alpha+\alpha'+\alpha'')=0.$$

32. *Forme* $B^{(ij)}$. — Puisque chaque terme de P doit contenir ρ_i et chaque terme de Q, ρ_j, et comme P et Q doivent être formés respectivement de termes tels que $G\alpha\cos(\psi+\omega)$ et $G\beta\cos(\psi+\omega)$, je pose

$$P=G\alpha\cos(\psi+\omega)+G'\alpha'\cos(\psi'+\omega')+G''\alpha''\cos(\psi''+\omega''),$$

$$Q=G\beta\cos(\psi+\omega)+G'\beta'\cos(\psi'+\omega')+G''\beta''\cos(\psi''+\omega''),$$

où

$$\psi=\alpha l_i+\beta l_j,\quad \psi'=\alpha' l_i+\beta' l_j,\quad \psi''=\alpha'' l_i+\beta'' l_j.$$

La démonstration qui va suivre pourra s'étendre aussi aux termes de P et Q qui dépendent des longitudes moyennes des autres planètes.

On a

$$\frac{d^2P'_j}{dt^2}=\frac{d^2Q'_i}{dt^2}=G\alpha\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2\sin(\psi+\omega)+G'\alpha'\beta(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2$$
$$\sin(\psi'+\omega')+G^{\bullet}\alpha''\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2\sin(\psi''+\omega''),$$

$$\frac{d^2P'_i}{dt^2}=G\alpha^2(\alpha n_i+\beta n)^2\sin(\psi+\omega)+G'\alpha'^2(\alpha' n_i+\beta' n)^2$$
$$\sin(\psi'+\omega')+G''\alpha''^2(\alpha'' n_i+\beta'' n)^2\sin(\psi''+\omega''),$$

$$\frac{d^2Q''_i}{dt^2}=G\alpha^2\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2\cos(\psi+\omega)+G'\alpha'^2\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2$$
$$\cos(\psi'+\omega')+G''\alpha''^2\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2\cos(\psi''+\omega'').$$

Si l'on forme l'expression (d), on verra que le terme de $B^{(ij)}$, qui contient cos u, est

$$\frac{GG'G''}{4}\cos u \times \left\{ \frac{\beta'\beta''\alpha^2(\alpha n_i+\beta n_j)^2[\alpha'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\alpha''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2]}{[(\alpha'+\alpha'')n_i+(\beta'+\beta'')n_j]^2} \right.$$

$$+\frac{\beta\beta''\alpha'^2(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2[\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\alpha''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha'')n_i+(\beta+\beta'')n_j]^2}$$

$$+\frac{\beta\beta'\alpha''^2(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2[\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\alpha'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha')n_i+(\beta+\beta')n\,]^2}$$

$$+\frac{\alpha'\alpha''\alpha\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2[\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2+\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2]}{[(\alpha'+\alpha'')n_i+(\beta'+\beta'')n_j]^2}$$

$$+\frac{\alpha\alpha''\alpha'\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2]\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha'')n_i+(\beta+\beta'')n_j]^2}$$

$$+\frac{\alpha\alpha'\alpha''\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2[\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2+(\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha')n_i+(\beta+\beta')n_j]^2}$$

$$+\alpha^2\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2(\alpha'\beta''+\alpha''\beta')+\alpha'^2\beta'(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2$$

$$\left.(\alpha\beta''+\alpha''\beta)+\alpha''^2\beta''(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\right\}.$$

Les conditions (38) réduisent le coefficient de $\frac{GG'G''}{4}\cos u$ à

$$[\alpha\beta(\alpha'\beta''+\alpha''\beta')(\alpha n_i+\beta n_j)^2+\alpha'\beta'(\alpha''\beta+\alpha\beta'')(\alpha' n_i+\beta' n_j)^2$$
$$+\alpha''\beta''(\alpha'\beta+\alpha\beta')(\alpha'' n_i+\beta'' n_j)^2](\alpha+\alpha'+\alpha'')=0,$$

et, par conséquent, $B^{(ij)}$ ne renfermera pas de terme indépendant du temps.

33. *Forme* $B^{(ik)}$. — Soient

$$\psi=\alpha l_i+\beta l_j,\quad \psi'=\alpha' l_i+\gamma l'_k,\quad \psi''=\beta'' l_j+\gamma'' l_k.$$

D'après ce qui a été dit au n⁰ 28, à chaque terme tel que $G''\beta''\cos(\psi''+\omega'')$ de P correspond un terme $G''\gamma''\cos(\psi''+\omega'')$ de Q ; de plus, tous les termes de P dépendent de ρ_j et tous ceux de Q de ρ_k. Pour notre démonstration, il suffit de considérer les termes suivants :

$$P = G\beta \cos(\psi + \omega) + G''\beta'' \cos(\psi'' + \omega'').$$
$$Q = G\gamma' \cos(\psi' + \omega') + G''\gamma'' \cos(\psi'' + \omega''),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2P'_i}{dt^2} = G\alpha\beta\,(\alpha n_i + \beta n_j)^2 \sin(\psi + \omega),$$
$$\frac{d^2Q_i}{dt^2} = G'\alpha'\gamma'\,(\alpha' n_i + \gamma' n_k)^2 \sin(\psi' + \omega').$$
$$\frac{d^2P'_k}{dt^2} = \frac{d^2Q'_j}{dt^2} = G''\beta''\gamma''(\beta'' n_j + \gamma'' n_k)^2 \sin(\psi'' + \omega'')$$

On a aussi

$$P''_{ik} = 0,$$

car chaque terme de P ne dépend en même temps que des moyens mouvements de deux planètes, dont l'une est toujours m_j. D'après cela, l'expression de $B^{(jk)}$ sera formée de termes tels que

$$+\frac{GG'G''}{4}\beta\beta''\gamma'\gamma''(\beta'' n_j + \gamma'' n_k)^2 \left\{ \frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2}{[\alpha' n_i + \beta'' n_j + (\gamma' + \gamma'')n_k]^2} + \frac{\alpha'(\alpha' n_i + \gamma' n_k)^2}{[\alpha n_i + (\beta + \beta'')n_j + \gamma'' n_k]^2} \right\} \cos u\,;$$

et, pour que le temps disparaisse, il faut avoir

$$(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta'')n_j + (\gamma' + \gamma'')n_k = 0.$$

Or, dans la nature, les moyens mouvements des planètes ne remplissent jamais cette condition, si ce n'est lorsqu'on a simultanément

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \beta + \beta'' = 0, \quad \gamma' + \gamma'' = 0\,;$$

mais, dans ce cas, le coefficient de $\dfrac{GG'G''}{4}\cos u$ devient

$$\beta\beta''\gamma'\gamma''\,(\beta'' n_j + \gamma'' n_k)^2(\alpha + \alpha'),$$

et il est nul.

34. *Forme* $(da_i, da'_i)^{(i)}$. — Soient encore

$$\psi = \alpha l_i + \beta l_j, \quad \psi' = \alpha' l_i + \beta' l_j, \quad \psi'' = \alpha'' l_i + \beta'' l_j,$$

et prenons dans chacune des fonctions P, Q, R un terme dépendant des moyens mouvements des deux mêmes planètes

$$P = G \cos(\psi + \omega), \quad Q = G' \cos(\psi' + \omega'), \quad R = G'' \cos(\psi'' + \omega'');$$

d'où

$$\frac{d^2 P'_i}{dt^2} = G\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2 \sin(\psi + \omega), \quad Q'_i = -G'\alpha' \sin(\psi' + \omega').$$

$$\frac{dR'_i}{dt} = G''\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j) \cos(\psi'' + \omega''),$$

Le terme en $\sin u$ de $(da_i, da'_i)^{(i)}$ est

$$-\frac{GG'G''}{4} \sin u \times \left\{ \frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2}{[(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j]^2} - \frac{\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)}{(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j} + \alpha' \right\},$$

et, quand il est indépendant du temps, il se réduit à

$$-\frac{GG'G''}{4} \sin(\omega + \omega' + \omega'') \times (\alpha + \alpha' + \alpha'') = 0.$$

Il est facile de voir que $(da_i, da'_i)^{(i)}$ renferme aussi des termes de la forme $At \cos(\psi + \omega) + Bt^2 \cos(\psi + \omega)$.

35. *Forme* $(da_i da'_i, da_i, da'_i)$. — Je prends encore

$$P = G \cos(\psi + \omega), \quad Q = G' \cos(\psi' + \omega'), \quad R = G'' \cos(\psi'' + \omega''),$$

ce qui donne

$$\frac{dP'_i}{dt} = -G\alpha(\alpha n_i + \beta n_j) \cos(\psi + \omega), \quad \frac{dQ'_i}{dt} = -G'\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j) \cos(\psi' + \omega'),$$

$$R'_i = -G''\alpha'' \sin(\psi'' + \omega'').$$

L'expression (g) sera formée de termes tels que

$$\frac{GG'G''}{4} \sin u \times \left[\frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)}{(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j} + \frac{\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)}{(\alpha + \alpha'')n_i + (\beta + \beta'')n_j} - \alpha'' \right]$$

qui, lorsqu'on leur applique les conditions (38), prennent la forme

$$-\frac{GG'G''}{4} (\alpha + \alpha' + \alpha'') \sin(\omega + \omega' + \omega'');$$

or cette quantité est nulle.

En dehors des termes simplement périodiques, on trouve aussi, dans $(da_i da'_i, da_i da'_i)$, des termes de la forme $At \cos(\psi + \omega)$.

36. Il est facile de s'assurer que les démonstrations exposées dans les n^{os} 29, 30,..., 35 sont tout à fait générales ; par conséquent, $M_i \delta V_i'$ ne contient pas des termes constants du troisième ordre par rapport aux masses. Il résulte de là que le terme séculaire (20) ne peut pas se réduire avec d'autres, et ,par suite, le demi-grand axe est soumis à des inégalités séculaires du troisième ordre.

Il est inutile de pousser plus loin l'approximation pour voir ce qui arrive à l'égard des termes du quatrième, du cinquième,... ordre. En effet, l'existence de termes de la forme A, $Bt \cos(\psi+\omega)$, $Ct^2 \cos(\psi+\omega)$ parmi ceux du deuxième et du troisième ordre permet d'admettre d'une manière presque certaine que, parmi les termes d'un ordre supérieur au troisième, on en doit trouver de séculaires. L'invariabilité des grands axes n'existe donc que pour la première et la seconde puissance des masses.

2.

Despre măsura capacității buților

Memoriu

1878

(Inedit)

NOTIŢĂ ISTORICĂ

Măsurarea capacităţii buţilor de vin şi alte băuturi a fost o chestiune de mare importanţă pentru comerţul acestor produse. După indicaţiunile ce ni s'au dat de d. C. Stătescu,[20] directorul general al serviciului de măsuri şi greutăţi, putem preciza cele ce urmează, pentru a înţelege rostul lucrării lui Spiru Haret ce se publică aici.

Măsurarea capacităţii unui vas a purtat şi poartă în popor numele de *cotitul* buţilor. Desigur că, în veacurile trecute, cu ocazia transacţiunilor ce se făceau, au fost şi unelte de măsurat şi regule după cari se făcea măsurătoarea. O culegere de asemenea regule am aflat în bibl. Academiei Române *„Invăţătură pentru măsura codului"* tip. 1824, fiind *a treia* ediţie. S'au găsit nişte vergele lungi de 2 metri cari erau marcate cu marca Moldovei şi purtau data 1853.

In 1864 s'a decretat legea pentru introducerea sistemului metric, acordându-se o perioadă de transiţiune până la 1 Ianuarie 1866; dar această perioadă s'a tot prelungit până la sfârşitul anului 1884.

Fireşte, în acest timp, oamenii au căutat să se deprindă cu noile unităţi, dar trebuia să cunoască şi pe cele vechi, pentrucă — mai ales în procese sau în facerea actelor judecătoreşti — era nevoie să se facă comparaţiuni. De aceea şi în şcoale se învăţau ambele feluri de măsurători: cel vechiu şi cel nou. Eu am apucat în clasele primare acest învăţământ. Vechile măsuri se numeau *numere complexe* şi cereau o mare sforţare de memorie, iar problemele ce ni se dădeau aveau de obiect mai ales *transformarea* măsurilor vechi în noi şi vice-versa.

Desrădăcinarea vechilor măsuri s'a făcut cu mare greutate; putem zice că nici nu s'a terminat definitiv. E de observat că acest lucru s'a petrecut chiar în Franţa, ţara de origine a sistemului metric. Mi-aduc aminte că în anii 1905 şi urm., când mă găseam în Paris, am fost nevoit să mă deprind cu vechea unitate de măsură franceză numită *la livre* = ½ kilogram, căci în toate prăvăliile toate socotelile se făceau după vechia *livre*. Imi vine să râd şi acum de păţania din primele zile ale aşezării mele, când, văzând preţurile pe cartoanele înfipte în mărfuri am crezut că sunt calculate pe kilograme şi am rămas uimit când am constatat la cântăreală că nu cumpărasem decât jumătate din ce socoteam eu.

De observat este că măsura pe care o numeau *livre* în 1900 nu era chiar aceea dinaintea sistemului metric, care cântărea 489 grame, ci se făcuse printr'o anume convenţiune 500 grame. Cu alte cuvinte: era tot măsură metrică, dar cu *numele* cel vechiu.

La noi s'a petrecut un fapt şi mai curios. In vechiul sistem de măsuri, pentru greutăţi şi pentru lichide aveam *ocaua*, împărţită în 4 litre (o oca de vin şi o oca de brânză). După porunca stăpânirii a dispărut *ocaua*, dar *litra* veche s'a întâlnit cu *litrul* nou şi s'a produs o confuziune de numiri. Cei bătrâni şi mulţi locuitori din sate au uitat *ocaua*, au adoptat *kilogramul* (numit *kil*), dar l-au întrebuinţat ca *ocaua* şi la greutate şi la lichide (un kil de brânză şi un kil de vin). Ba, fiindcă în vechiul sistem exista *chila* (p. cereale), am auzit zicându-se : *o chilă* de vin.

Observ că, poate nu pretutindeni, dar în multe locuri, se socoteşte şi azi producţia cerealelor nu în *hectolitri*, ci în *chile* la *pogon*. Adică şi pentru măsurarea suprafeţelor vechile numiri nu au murit cu desăvârşire. Pogonul este jumătate de hectar, de şi această potrivire este nouă convenţională, căci *pogonul* vechiu n'avea peste tot valoarea de 5000 m. p.

Pentru măsurătoarea vaselor s'a decretat în 1871 (21 Februar) cotul numit *noul cot Fălcoianu*. Cred că autorul este generalul de mai târziu Ştefan Fălcoianu. Dar acesta era alcătuit după vechile măsuri, căci aşa văd în broşura din 1873 : „Instrucţiune pentru măsurătoarea capacităţii cu noul cot Fălcoianu", unde se vorbeşte de *ocale* şi *dramuri*. De ce s'a numit *nou* ? D. C. Stătescu socoteşte că ţinea socoteală şi de sistemul metric, „cotul având pe lângă „diviziunile corespunzătoare vedrelor, ocalelor şi diviziunile pentru litri".

In 1879 s'a publicat un fel de concurs pentru un alt sistem de cotit, la care s'au prezentat : inginerul Pisone, Sp. Haret, Caralca şi colonelul Fălcoianu.[21] Haret era atunci profesor la facultatea de ştiinţe.

Atunci vedem că s'a trimes lui Haret următoarea adresă din partea Ministerului lucrărilor publice, Inspecţiunea serviciului de control al căilor ferate. Nr. 5100 (23 Dec. 1878, 4 Ianuar 1879).

Domnule,

Comisiunea instituită de Ministerul Lucrărilor Publice pentru a examina şi a se pronunţa asupra diferitelor systeme propuse pentru cotitul vasselor, se va întruni, spre a începe studiul său, Miercuri 27 Decembrie la ora 2 p. m. în localul Inspecţiunei Generale de Control.

Pentru a se putea pronunţa în deplină cunoştinţă de cauză, Comisiunea doreşte ca fiecare autor al unui atare system să asiste asemenea la desbaterile sale, pentru ca astfel fiecare să-şi desvolte în faţa membrilor chiar bazele ce au servit la calculul cotului şi tablelor sale, precum şi, la trebuinţă, a face experienţe ad-hoc.

In consecinţă am onoare a vă ruga, Domnul meu, să bine-voiţi a vă prezinta şi D-voastră ca unul ce aveţi un atare sistem de propus, la întrunirea ce va avea loc la 27 Decembrie a. c.

Primiţi vă rog, Domnule, asigurarea oasebitei mele consideraţiuni.

Inspector General,
(ss) *C. Olănescu*

Comisiunea era compusă din : inginerii *C. Olănescu*,[22] fost mai târziu ministru, *Aninoşanu* şi *Cerchez*.

In faţa acestei comisiuni a prezentat Haret memoriul său.

E curios că nu s'a ales nici una din metodele prezentate, ci printr'o lege din acelaşi an 1879 Ministerul de Finanţe a stabilit că pentru perceperea taxelor asupra spirtoaselor să se întrebuinţeze sistemul metric aplicându-se cotul din Franţa, numit *Jauge*.

Haret n'a publicat atunci memoriul său, o lucrare, după spusa specialiştilor, de o reală valoare, ci l-a păstrat în manuscris. După acest manuscris l-am reprodus în paginele următoare.

Gh. Adamescu

DESPRE MĂSURA CAPACITĂŢII BUŢILOR.

MEMORIU.

1878

1. Imi propun în acest Memoriu a studia chestiunea măsurării capacităţii buţilor, a examina metodele propuse în anii din urmă de D-l Lt.-Col. St. Fălcoianu şi de D-l Inginer B. Pisone, şi a desvolta o nouă metodă, pe care o cred mai raţională şi mai practică, pentru a ajunge la acelaş scop.

Forma buţilor e destul de greu de asimilat cu vreo formă geometrică; doaga are forma care se apropie de arcul de elipsă, de arcul de parabolă şi de două drepte racordate prin un arc de cerc, fără a putea fi, în general, identificată cu vreuna din aceste curbe. Această împrejurare face destul de grea problema măsurării capacităţii lor, mai ales când e vorba a evalua golurile. Cu toate acestea, deoarece chestiunea este una din acelea care se prezintă mereu în viaţa de toate zilele, a fost nevoie a se găsi mijloace de a se evalua capacitatea unui vas în modul cel mai repede posibil.

2. Un butoi este un solid de revoluţie născut prin învârtirea în jurul unui ax XY a unei curbe AB, concave către axul de revoluţie şi simetrică în raport cu dreapta CD; volumul e mărginit prin două plane, AA′ şi BB′, perpendiculare pe axul XY şi situate la egală distanţă de amândouă părţile ecuatorului CD.

Curba AB este *doaga* vasului; Cercurile paralele AA′, BB′ se numesc *fundurile* lui; distanţa perpendiculară, EF, între dânsele, este *lungimea* lui; diametrul CD al secțiunii mijlocii se chiamă *vrană*.

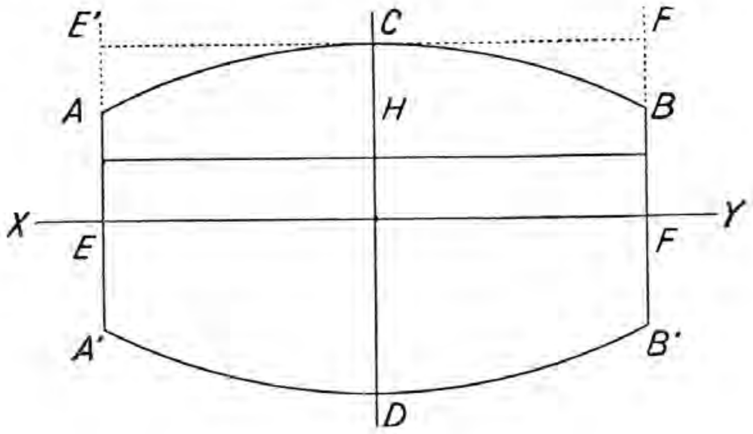

Fig. 1.

Pentru aflarea capacității întregi a vasului, se măsoară diametrele fundului, al vranei și lungimea.

Când vasul e numai în parte plin, se mai măsoară și înălțimea DH a lichidului sub vrană, sau *tancul* CH, care este diferența între vrană și înălțime.

Se presupune totdeauna, în practică, că axul XY est e orizontal, și că diametrul CD al vranei e vertical și întâlnește axul XY.

3. In practică, e peste putință ca măsura capacității vaselor să fie de o exactitate riguroasă. In adevăr, sunt o mulțime de cauze de erori, de cari e imposibil a ține seama în calcul; astfel:

a) Lungimea EF se măsoară de ordinar în unul din modurile următoare: dacă doaga nu e prea curbă, se măsoară lungimea ei, AB, și această lungime se ia drept lungimea EF a vasului. Dacă curbura e mai pronunțată, se întinde o panglică divizată deasupra butoiului paralel cu axul său, și se observă diviziunile ce sunt în dreptul fundurilor. In fine mai este un mijloc, care mai niciodată nu e utilizat în practică, și care constă întru a măsura diametrul fundului, $AA'=2b$, al vranei $CD=2a$, și diagonala $CA'=d$ cu un baston introdus pe *vrana* C; atunci, în triunghiul dreptunghiu CA'E' avem:

$$CE'=\frac{EF}{2}=\sqrt{\overline{CA'}^2-\overline{A'E'}^2}=\sqrt{d^2-(a+b)^2},$$

formula care dă lungimea EF.

Niciuna din aceste metode nu dă rezultate certe: ceadintâi înlocuește coarda EF prin arcul AB ce ea subîntinde; în cea de-a doua este nesiguranță când se citesc diviziunile ce sunt în dreptul fundului; grosimea fundurilor nu e cunoscută; în fine nu e cineva sigur că panglica este în adevăr paralelă cu axul vasului. In cea din urmă se introduc erori atât din cauza celor ce provin din măsurarea fundului și vranei, despre care vom vorbi îndată, cât și din măsura lungimii CA', măsură care este jenată prin oblicitatea ce trebue să o dea bastonul cu care se măsoară și prin dificultatea de a găsi punctul cel mai de jos al fundului.

b) Diametrul fundului circular AA', se măsura căutând cu o riglă divizată care este cea mai mare lungime rectilinie ce se poate cuprinde în interiorul circomferinței lui; însă această măsură comportă și ea cauze de erori, din cauza capetelor doagelor care trec în afară în jurul fundului.

Se mai întâmplă însă de multe ori că cele două funduri nu sunt de acelaș diametru; în acest caz se ia media aritmetică a acestor două funduri drept fundul vasului, ceeace în genere nu este exact.

c) Diametrul vranei CD se măsoară introducând pe vrana C un baston vertical. Dacă însă axul XY nu este perfect orizontal sau dacă verticala vranei C nu întâlnește acest ax, diametrul vranei astfel găsit nu va fi exact.

d) Inălțimea HD a lichidului se măsoară tot ca diametrul vranei și are aceleași cauze de erori.

e) In evaluarea capacității vaselor fundurile se consideră ca plane, ceeace nu este adevărat deoarece ele încearcă în vecinătatea circomferinței lor o mișcare de grosime, pentru a se introduce în *gardin*.

f) Chiar pentru vasele cele mai bine condiționate nu se poate garanta că au forma de tot regulată, adică că toate doagele sunt egale, că fundurile sunt egale și perpendiculare pe ax, etc.; și de erorile de felul acesta este imposibil a ține seamă în calcul.

g) Chiar supozând că vasul ar avea la un moment oarecare o formă regulată, el nu o poate conserva, din cauza deformărilor inevitabile ce încearcă și care fac că forma sa nu este totdeauna identică cu sine însuși. Aceste deformări provin din presiunea lichidului interior și din greutatea vasului și pentru a ține seama de dânsele, ar trebui să avem în vedere: natura materialului din care e făcut vasul, dimensiunile lui, modul cum e așezat, greutatea și natura lichidelor care au umplut succesiv vasul, timpul cât au stat într'însul, etc. Este evident că acestea toate nu se pot introduce în formule.

4. Acestea sunt cauzele principale de erori în măsura capacității vaselor; și din enumerația precedentă se vede că, fiind imposibil a se da o metodă care să fie riguros exactă în toate cazurile posibile, oamenii au fost nevoiți a se mulțumi cu metode aproximative; toată greutatea a fost a alege aceste metode în astfel de mod încât rezultatele date de ele să se apropie cât se poate mai mult de cele date de experiență. Voi cita aci cele mai principale din cele adoptate până astăzi.

Să considerăm două trunchiuri de con circular drept, egale și lipite unul de altul pe baza lor cea mare; fie AA′DC și BB′CD secțiunile acestor trunchiuri prin un plan ce trece prin axul comun EF; să numim $2a$=CD diametrul bazei celei mari, $2b$=AA′=BB′ diametrul bazei celei mici, c=EH=HF înălțimea fiecărui trunchiu, volumul solidului întreg este

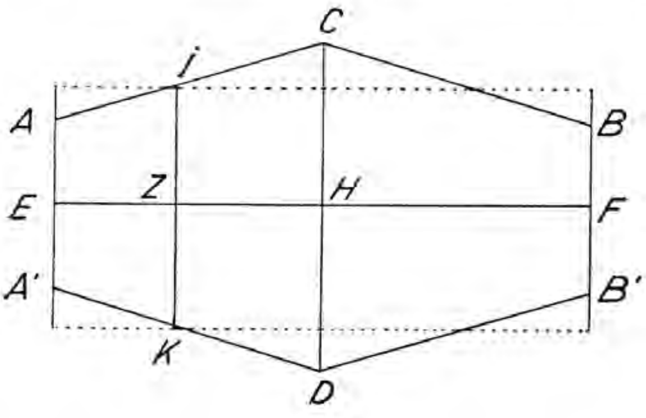

Fig. 2.

$$(1) \qquad V=\frac{2\pi c}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Aceasta a fost formula propusă de D-l P. Poenaru,[23] și întrebuințată în România pentru măsura capacității vaselor până când D-l Lt. Colonel Fălcoianu propuse metoda sa.

Este evident însă că volumul dat de această formulă e mai mic decât volumul vasului, că se neglijază toată partea cuprinsă între doage, care sunt curba și suprafața laterală a trunchiului dublu-conic. Oughtred propuse a schimba termenul ab n a^2, și înlocui formula (1) prin

$$V = \frac{2\pi c}{3} (2a^2 + b^2), \tag{2}$$

care servă și până astăzi în Anglia pentru măsura capacității vaselor. (*Sonnet* Dictionnaire des Mathématiques appliquées, article Jangeorge; *Tombeck*. Tr. de Géom. élém.).

In Franța s'a întrebuințat mai întâi formula următoare:

$$V = 2\pi c \left[b + \frac{2}{3}(a-b)\right]^2 = 2\pi c\ [b + 0{,}666(a-b)]^2, \tag{3}$$

care fusese impusă printr'un decret al guvernului revoluționar din anul al VII-lea (Puille). Acum însă se aplică *formula lui Dez*:

$$V = 2\pi c\ [b + 0{,}625(a-b)]^2. \tag{4}$$

Iată cum s'a ajuns la această formulă: dacă considerăm secțiunea IK făcută în unul din trunchiurile de con la egală depărtare de bazele sale, raza acestei secțiuni va fi

$$IZ = \frac{a+b}{2},$$

și prinurmare volumul V′ al unui cilindru care ar avea drept bază secțiunea IK și drept înălțime lungimea $2c$ a vasului, ar fi

$$V' = 2\pi c \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

așa că diferența V—V′ între volumul trunchiului dublu-conic și volumul acestui cilindru este

$$V - V' = \frac{2\pi c}{3}(a^2 + ab + b^2) - 2\pi c \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{\pi c}{6}(a-b)^2;$$

și prin urmare dacă diferența $a—b$ este mică, V va diferi foarte puțin de V′, și se va putea lua unul în locul altuia. Insă valoarea lui V′ se poate transforma în modul următor:

$$V'=2\pi c\left[b+\frac{4}{8}(a-b)\right]^2$$

Dez a înlocuit coeficientul $\frac{4}{8}$ prin $\frac{5}{8}=0{,}625$, și a luat valoarea corespunzătoare a lui V′ drept expresie a volumului butoiului care are dimensiunile $2a$, $2b$, $2c$; astfel s'a găsit formula (4) (Tombeck, Sonnet).

In raportul D-lui Inginer N. Cucu[24] asupra metodei D-lui M. Pisone, publicat în *Pressa* din 6 Noembrie 1877, precum și un articol recent al D-lui Caralle publicat tot în *Pressa* (numărul din 17 Noembrie 1878) se zice că în Anglia se întrebuințează formula (3), iar în Franța pentru doage de o curbură mare formula (3); pentru doage de curbură mijlocie, formula

$$V=2\pi c\,[b+0{,}6(a-b)]^2;$$

pentru doage puțin curbe, formula

$$V=2\pi c\,[b+1{,}1(a-b)]^2;$$

Dicționarul de Matematică aplicată al D-lui *H. Sonnet*, precum și *tratatul de geometrie elementară de Tombeck și cursul de arpentagiu* de *Puille* concordă pentru a afirma că în Anglia se întrebuințează numai formula (2) a lui Oughtred, care nici nu poate a se reduce la formula (3); că formula (3) s'a întrebuințat altădată în Franța dar că acum e în uz formula (4) în toate cazurile. Cât pentru celelalte două formule din raportul D-lui Cucu, pe una n'o găsesc menționată nicăeri; cea din urmă, este chiar imposibilă, căci ea se poate scrie astfel:

$$V=2\pi c\,[a+0{,}1(a-b)]^2;$$

și volumul dat de această formulă este mai mare decât volumul $2\text{-}ca^2$ al unui cilindru având aceeași lungime ca și butoiul și drept bază secțiunea dela urmă ceeace este absurd.

In anul 1871, D-l Lt. Col. Fălcoianu propuse o metodă, care constă în aplicarea formulei lui Dez prin ajutorul unui *cot* construit într'un mod ingenios, deşi nu ajunge pe deplin scopul de a simplifica aplicarea acestei formule.

Cum că metoda D-lui Fălcoianu e bazată pe formula lui Dez, se poate vedea din examinarea cotului D-sale, căci d-sa pe cât ştiu n'a publicat niciun memoriu în această privinţă.

In fine, în 1876 D-l Ing. B. Pisone propuse o nouă metodă bazată pe formula

$$V = 2\pi c[b + 0{,}656(a-b)]\,; \tag{5}$$

care nu diferă de formula lui Dez decât prin coeficientul 0,656, care înlocuieşte pe 0,625. Motivele pentru care d-sa a adoptat acest număr îmi sunt necunoscute.

Din inspecţia formulelor (1), (2), (3), (4), (5) rezultă că ele revin a înlocui vasul de măsurat cu un cilindru circular drept având aceeaşi lungime ca şi vasul şi drept rază a bazei $\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$ sau $\sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$ sau $[b+0{,}666(a-b)]$, sau $[b+0{,}625(a-b)]$, sau $[b+0{,}656(a-b)]$.

5. In acest Memoriu eu întreprind a trata chestiunea, adoptând o doagă de formă geometrică care să împlinească condiţiunile următoare : să treacă prin punctele A, B, C, pe cari le determină măsurile despre cari am vorbit la § 2 ; să fie o curbă concavă către axul vasului şi simetrică în raport cu CD ; să fie cuprinsă între formele extreme de doage care se realizează în practică.

Avantagiile doagei astfel alese sunt multiple ; *a*) ecuaţiunea doagei fiind cunoscută, deoarece ea are o formă geometrică, se poate trata chestiunea întreagă în mod analitic şi studia toate circumstanţele problemei în toate cazurile posibile, ceeace nu se poate face cu formulele (2), (3), (4), (5), care ţin seamă numai de volumul vasului, fără a se ocupa de forma lui.

b) Prin adoptarea unei doage curbe, care să treacă prin punctele A, B, C, se ţine seamă de curbura doagei într'un mod mult mai raţional şi mai conform cu realitatea cazurilor decât prin metodele descrise la § 4. In fine metoda ce propun eu, permite a rezolva în mod analitic problema măsurării golurilor în toate cazurile posibile; metodele până aici propuse, sunt departe de a împlini această condiţiune.

In adevăr, metoda ce dă D-l Fălcoianu pentru măsurarea golurilor când axul este orizontal, este bazată pe cât se pare, pe oarecari considerații de similitudine, pe cari nimic nu le justifică. Zic *pe cât se pare*, pentrucă D-l Fălcoianu nu expune considerațiunile teoretice prin care a ajuns la metoda ce propune, și de aceea nu se poate ști cu siguranță care este în realitate principiul ei.

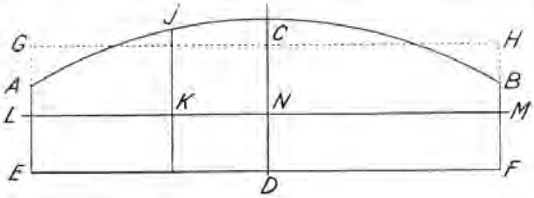

Fig. 3

D-l Pisone, pentru a măsura golul, propune a-l considera iarăși ca un cilindru de o lungime egală cu a golului și de un fund IK egal cu secțiunea făcută în gol la distanța $KN = 0{,}344c$ socotită dela vrană.

Această metodă introduce erori relativ mai simțitoare decât când e aplicată la măsura capacității pline a vasului. Pentru a ne convinge de aceasta, să considerăm un gol ABC, cuprins din sus de gardin.

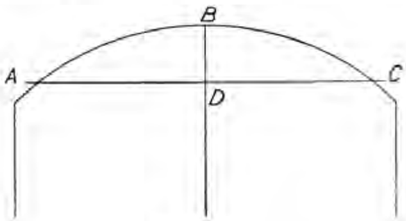

Fig. 4.

Cu cât țancul BD, al acestui gol e mai mic, cu atât fundul mijlociu se apropie mai mult de mijlocul distanței AD, pentrucă pe o mică întindere de ambele părți ale vranei, vasul se confundă aproape cu un trunchiu dublu-conic. Dacă țancul crește, fundul mijlociu se află între mijlocul lui AD și între vrană și se apropie de vrană cu cât crește țancul. Așa dar, chiar admițând valoarea 0,656 a coeficientului D-lui Pisone pentru vasele pline, când e vorba de goluri, poziția fundului mijlociu ar varia între poziții extreme corespunzătoare la distanțele $0{,}344c$ și $0{,}500c$ socotite dela vrană; prin urmare, D-sa fixând poziția fundului mijlociu la distanța $0{,}344\ c$, comite o eroare care se poate ridica pânăla $0{,}156c$ în poziția acestui fund. Afară de aceasta, metoda D-lui Pisone reclamă cunoștința lungimii golului, care nu se poate măsura dacă golul este deasupra gardinului.

Din contra, dacă forma geometrică a doagei e cunoscută, e totdeauna posibil a evalua în mod analitic nu numai volumul întreg al vasului, dar și volumul cuprins între pereții vasului și un plan oarecare dus în interiorul lui, adică golul vasului în orice poziție ar ocupa el. Aceasta este numai o afacere de calcul integral.

6. Rămâne a alege forma geometrică de doagă care să împlinească condițiile impuse în § 5.

Am spus că pentru determinarea capacității vasului se măsoară *dimensiile* următoare: lungimea vasului, $DE=2c$ diametrul fundurilor $AA'=BB'=2b$; diametrul vranei, $CC'=2a$. Se știe însă că vasele bine construite sunt simetrice în raport cu planul median, adică cu planul perpendicular pe ax care trece prin vrană. Așa dar luând ca axe coordonate axul vranei și perpendiculara pe acest ax care trece prin vrană, lungimile măsurate sunt coordonate cari determină punctele A, B, C. E însă de observat că, dreapta OY fiind un ax de simetrie al doagei, punctul C este un vârf al ei. Așa dar curba căutată trebue să treacă prin A și B și să aibă pe C drept vârf, ceeace, după cum se știe din geometria analitică, echivalează cu patru condițiuni.

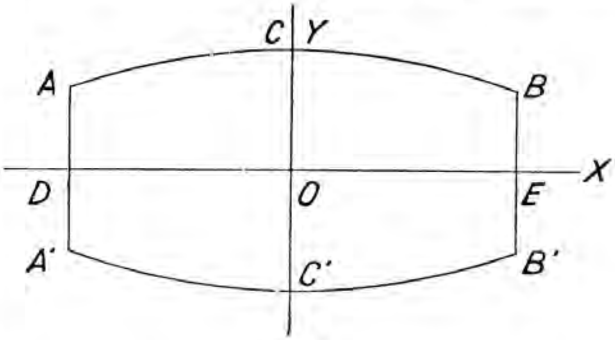

Fig. 5.

Dacă ne impunem restricția de a nu alege doaga decât printre curbele de gradul I sau II, — restricție care e justificată prin cunoștința necompletă a proprietăților curbelor de un grad superior și prin complicarea extremă a calculelor la care ar da naștere alegerea unei astfel de curbe, — singurele feluri de curbe cari pot fi cu totul determinate prin cele patru condiții determinate prin măsurători, sunt: cercul, parabola, hiperbola echilateră și linia poligonală ACB.

Nu vom putea lua doaga eliptică, nici hiperbolică, nici cea formată din două drepte racordate printr'un arc de cerc pentrucă ecuația unei elipse sau a unei hiperbole depinde de cinci parametre, dintre care numai patru ar putea fi determinate prin condițiile sus citate; cel de al cincilea ar rămâne nedeterminat. Tot asemenea ar rămâne un parametru nedeterminat, când am admite doaga formată din două drepte racordate prin un arc de cerc.

Din contră, un cerc, o hiperbolă echilateră, o parabolă sau două drepte, sunt perfect determinate prin condițiile de a trece prin A, B, C și de a fi simetrice în raport cu dreapta O Y.

Dintre aceastea însă trebuie să lăsăm la o parte cele două drepte, care ar da naștere la un vas format din două trunchiuri de con egale lipite la bază; vasele naturale sunt totdeauna mai mari decât vasele dublu-conice înscrise într'însele.

Hiperbola echilateră nu corespunde la chestiune, pentrucă asimptotele sale sunt rectangulare, și simpla inspecțiune ne arată că niciodată doaga unui vas natural nu are o curbură atât de mare încât să tindă a deveni tangentă la două drepte așa de tare înclinate una pe alta.

Cercul încă trebuie lăsat la o parte. In adevăr, simpla inspecție arată că doagele vaselor naturale nu au niciodată o curbură egală în toate părțile lor: ea descrește către extre mități. Pe lângă aceasta, se știe din calculul variațiunilor că dintre toate curbele de aceeași lungime cuprinse între două puncte date, cercul este cel care prin învârtirea în jurul unui ax naște volumul a cărei secțiune meridiană este cea mai mare; așa că, chiar dacă la un moment dat doaga ar fi circulară, toate cauzele de deformațiune cum presiunea lichidului, defectul de soliditate, etc., ar avea de efect a micșora această secțiune, și a altera prin urmare forma circulară a doagei. In fine, cum arată § 17 sunt și alte motive care m'au făcct să nu adopt doaga circulară.

Așa dar, nu rămâne a adopta decât doaga parabolică, și aceasta și este ipoteza ce voiu admite în tot restul acestui memoriu.

Volumul vasului găsit în această ipoteză va fi totdeauna cuprins între cel corespunzător la doaga circulară și cel născut de doaga poligonală; ba încă voi demonstra (§ 15) că el este totdeauna cuprins între cele date de formula lui Oughtred[25] și a lui Dez.

Vom vedea încă că hipoteza doagei parabolice reproduce mult mai bine decât formulele D-lor Dez și Pisone, toate circumstanțele chestiunii.

7. Volumul vaselor pline sau goale se poate măsura în două feluri, având amândouă de scop a conta calculele : sau prin întrebuințarea unui cot (jauge), sau prin table. D-l Fălcoianu a adoptat primul mijloc, D-l Pisone pe cel de-al doilea.

In această privință se poate zice că cotul ar avea un mare avantajiu asupra oricărei alte metode dacă ar da volumul prin o singură lectură, și fără niciun calcul. Insă cotul D-lui Fălcoianu nu împlinește această condițiune ; el nu dispensează de calcule destul de complicate pentru oamenii cari de cele mai multe ori au a se servi cu dânsul, și cari sunt în mare parte, fără nicio instrucțiune.

De aceea chiar până astăzi nu sunt mulți funcționari ai accizelor cari să-l întrebuințeze cu îndemânare ceeace dă totdeauna loc la reclamațiuni nesfârșite. Trebue să adaog că instrumentul mai are inconvenientul de a fi de un preț relativ mare.

In fine erorile de lectură pe cot sunt mai mari decât cele făcute în măsurătorile obicinuite, ceea ce mărește încă erorile comise prin adoptarea formulei aproximative a lui Dez.

Aceste inconveniente dispar când se face uz de table : în formarea tablelor cineva poate calcula numerele cu toată rigoarea cerută, și e mijloc de a forma tablele în astfel de chip, încât să suprime calculul cu totul, fără să fie prea voluminoase și costisitoare. Tablele d-lui Pisone nu prea sunt în aceste condițiuni : nici D-sa nu a reușit a înlătura calculul de tot ; și pe urmă tablele D-sale nu sunt complete, deoarece lungimile vasului nu sunt introduse decât din 10 în 10 centimetri, și pentru lungimile intermediare cer a se face interpolațiuni. Mai în urmă, D-l Pisone a fabricat și un instrument pentru aflarea fundului mijlociu, ceea ce face că metoda D-sale nu mai evită astăzi inconvenientele ce se imputau metodei D-lui Fălcoianu.

8. Eu am adoptat metoda Tablelor. Volumul fiind o funcțiune omogenă și de gradul al treilea de dimensiuinile a, b, c, h ale vasului, el se va exprima prin o formulă

$$V_1 = c^3 . f_1\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right),$$

pentru vasele pline, și

$$V_2 = c^3 f_2\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{h}{c}\right)$$

pentru goluri. Calculul ce desvolt în acest Memoriu arată însă că, în cazul doagei parabolice, expresia acestor volume este de forma

$$V_1 = cf_1(a, b), \quad V_2 = cf_2 \ (a, b, h).$$

f_1 și f_2 fiind niște funcțiuni omogene de gradul al doilea în a b, h. Această circumstanță permite a se aduce o enormă simplificare în construcția tablelor.

Tablele construite de mine, deocamdată numai pentru calculul volumului vaselor pline, introduc dimensiunile vasului din jumătate în jumătate de centimetru și suprimă orice calcul, afară de o adunare de două numere întregi de câte șase cifre. Chiar această adunare ar fi putut fi înlăturată în teorie; însă atunci tablele ar fi avut o întindere prea considerabilă, ceeace le-ar fi mărit prețul fără niciun folos, deoarece toată lumea știe să facă o adunare de doi întregi.

PARTEA INTAIA.

VASELE PLINE.

9. **Calculul volumului vaselor pline.** Fie ACB doaga parabolică, OX axul vasului; OY axa parabolei perpendiculară pe OX; parabola ACB prin învârtirea sa în jurul axului OX naște suprafața buții. Fie $CC' = 2a$, diametrul vranei, $AA' = 2b$, diametrul fundului, $DE = 2c$ lungimea vasului.

Ecuația parabolei ACB, raportată la axele OX și OY, este

$$x^2 = 2p(-y + a). \tag{6}$$

Expresia volumului cuprins între suprafața de revoluție considerată și planele AA′ și BB′ este

$$V = \pi \int_{-c}^{+c} y^2 dx,$$

și înlocuind pe y cu valoarea sa scoasă din (6),

$$V = \pi \int_{-c}^{+c} \left(\frac{x^2}{2p} - a \right)^2 dx = \pi \int_{-c}^{+c} \left(\frac{x^4}{4p^2} - \frac{ax^2}{p} + a^2 \right) dx$$

Această integrală este foarte lesne de efectuat; avem:

$$(7)\qquad V=\pi\left(\frac{2c^5}{20p^2}-\frac{2ac^3}{3p}+2a^2c\right)=2\pi c\left(\frac{c^4}{20p^2}-\frac{ac^2}{3p}+a^2\right).$$

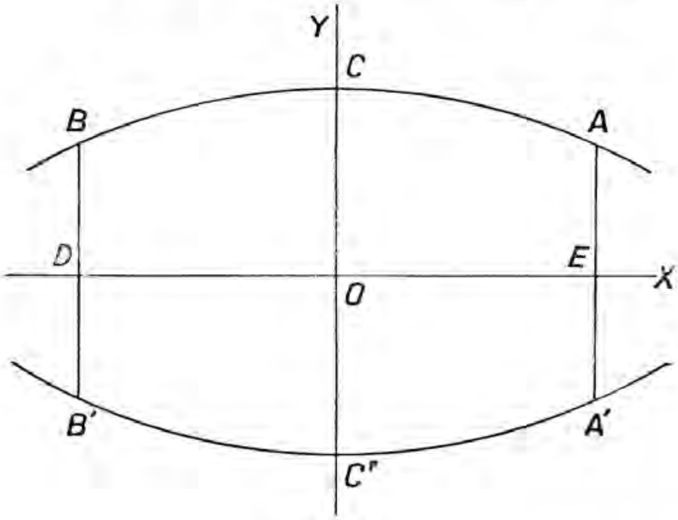

Fig. 6.

Parametrul p al parabolei se poate determina în funcție de dimensiunile a, b, c ale vasului. Pentru aceasta să exprimăm că parabola (6) trece prin punctul A, ale cărui coordonate sunt c, b; vom avea atunci:

$$c^2=p(a-b),$$

de unde

$$(8)\qquad p=\frac{c^2}{2(a-b)}.$$

Substituind această valoare în (7) și făcând toate reducerile obținem:

$$(9)\qquad V=\frac{2\pi c}{15}\,(8a^2+4ab+3b^2),$$

formulă care dă volumul întreg al vasului în funcție de dimensiunile lui măsurate.

Dacă $a=b$, avem: $V=2\pi ca^2$ care, este în adevăr expresia volumului cilindrului circular de înălțimea $2c$ și a cărui bază are raza a.

10. *Examinarea formulelor* (3), (4) și (5).

Aceaste formule pot fi toate cuprinse în una singură :

$$V=2\pi c[b+K(a-b)]^2, \qquad (10)$$

în care K este un coeficient constant însă având valori diferite în acele trei formule.

Acest coeficient trebue să fie mai mic decât 1 ; în adevăr formula (10) se poate scrie astfel :

$$V=2\pi c[a+(K-1)(a-b)]^2,$$

și dacă $K>1$, avem $V>2\pi ca^2$; adică volumul vesului ar fi mai mare decât volumul cilindrului circumscris, ceea ce este absurd.

Egalând valorile (9) și (10), avem :

$$8a^2+4ab+3b^2=15[b+K(a-b)]^2 ;$$

Divizând cu a^2 și punând $\frac{b}{a}=i$ avem :

$$15[i+K(1-i)]^2=8+4i+3i^2. \qquad (11)$$

Această ecuație arată că coeficientul K este funcție de i, adică de raportul diametrului fundului către diametrul vranei.

Prin urmare pentru ca formula (10) să convină la toate cazurile, ar trebui ca dintr'însa să dăm lui K câte o valoare particulară la fiecare valoare a lui i.

Tot din ecuația (11) rezultă consecința însemnată că K depinde numai de i, iar nu de valorile absolute ale lui b și a, cum nici de valoarea lui c.

Ordonând ecuațiunea (11) după puterile lui i, ea ia forma

$$(15K^2-30K+12)i^2+2(-15K^2+15K-2)i+ \\ +(15K^2-8)=0. \qquad (12)$$

Această ecuație este satisfăcută prin valoarea $i=1$ sau $b=a$, oricare ar fi valoarea lui K ; în cazul acesta vasul este cilindric. Prin urmare, formula aproximativă (10) este riguros exactă în cazul unui cilindru, ceea ce era evident, căci atunci (10) se reduce la

$$V=2\pi cb^2,$$

formulă cunoscută.

Soluțiile ecuației (12) sunt

$$i=1,\ i=\frac{15K^2-8}{15K^2-30K+12}. \tag{13}$$

11. Formula (10) înlocuește vasul dat prin un vas cilindric de aceeași lungime; baza acestui cilindru este secțiunea făcută la distanța dela fund $EH=Kc$ în trunchiul dublu-conic înscris în vasul dat.

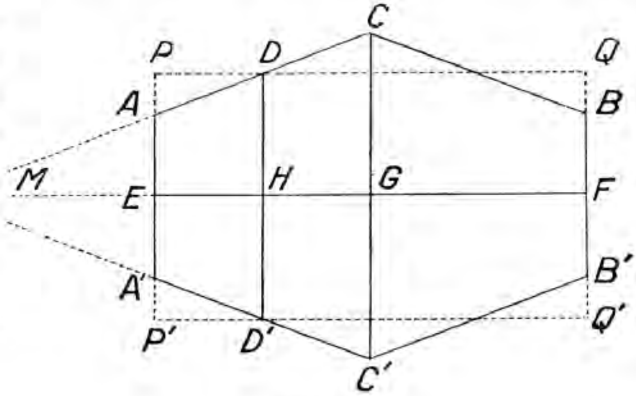

Fig. 7.

In adevăr, fie: $EM=h$, $GM=H$, $HM=h'$; avem

$$\frac{DH}{h'}=\frac{a}{H}=\frac{b}{h},$$

de unde

$$\frac{DH-b}{EH}=\frac{a-b}{c},$$

sau

$$DH=b+\frac{EH}{c}(a-b),$$

și dacă $EH=Kc$,

$$DH=b+K(a-b);$$

volumul cilindrului $PP'Q'Q$ este

$$2\pi c[b+K(a-b)]^2.$$

Este evident că dacă curbura vasului, adică diferența $a-b$ între bazele trunchiului dublu-conic crește, pozițiunea secțiunii DD' care servă de bază cilindriului $PP'Q'Q$ echivalent cu vasul dat, se va schimba, apropiindu-se de vrana CC'. Insă coeficientul K, care determină această poziție, e constant în formula (10); de unde urmează că valoarea lui V dat de această formulă nu convine decât pentru o singură valoare a curburei și pentru toate celelalte este numai aproximativă. Astfel fiind, era necesar ca să se aleagă valoarea lui K în astfel de mod, încât să fie o medie între valorile ce ia el pentru diferențele curburii posibile; formula (10) ar fi dat atunci rezultatele cele mai aproape de adevăr.

Formele vaselor întrebuințate variază între două forme extreme: cea cilindrică, când $a=b$, când adică $i=1$, și cea în care diametrul vranei e îndoit de al fundului, adică $i=\frac{1}{2}$; ar fi trebuit dar ca în formula (10) să se dea lui K o valoare care să corespundă la media valorilor extreme ale lui i, adică la

$$i=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}.$$

Vasul parabolic așa cum l'am definit la § 5 are totdeauna aceeași figură ca și vasul natural de aceleași dimensiuni. Să ne imaginăm însă că vasul dat îl înlocuim mai întâiu cu vasul cilindric al D-lor Dez sau Pisone și apoi pe acest din urmă cu un vas parabolic de acelaș volum. Dacă vasul cilindric exprimă în adevăr toate condițiile vasului dat, va trebui ca vasul parabolic la acare vom ajunge în fine să fie identic sau aproape identic cu vasul parabolic prin care am înlocuit deadreptul vasul dat.

Insă din cele precedente rezultă că vasul cilindric al D-lor Dez și Pisone nu se poate înlocui decât când acesta este cilindric sau de o formă cu totul neobișnuită cu un vas parabolic de aceleași dimensiuni și de acelaș volum cu vasul dat.

De aci rezultă că formula D-lor Dez și Pisone este defectuoasă, și aceasta provine din cauza valorii ce dau D-lor coeficientului K.

Formulele (13) dau însă:

pentru $K=\frac{2}{3}$, $i=1$;

pentru $K=0{,}625$, $i=1$ sau $i=2{,}4035$;
pentru $K=0{,}656$, $i=1$ sau $i=1{,}2612$,

Așa dar în formula (3) valoarea lui K corespunde tocmai la una din valorile extreme ale lui i, în loc de a corespunde la valoarea lui mijlocie; vasul dat trebuie să fie cilindric pentruca să se poată găsi un caz parabolic de aceleaşi dimensiuni care să fie echivalent cu dânsul. Cu cât i descreşte apropiindu-se de $\frac{1}{2}$, diferența între volumul vasului dat de formula (3) şi al vasului parabolic de aceleaşi dimensiuni merge crescând.

După formulele Dez şi Pisone afară de valoarea $i=1$, K corespunde încă la o valoare imposibilă a lui i, căci niciodată în practică fundul nu e mai mare decât vrana; i totdeauna e mai mic decât 1. Însă rezultatele precedente arată că vasul dat trebue să aibă fundul de 2,4035 ori mai mare decât vrana pentrucă să se poată găsi un vas parabolic de aceleaşi dimensiuni, al cărui volum să fie egal cu volumul vasului dat calcula după formula lui Dez. Dacă se aplică formula D-lui Pisone, fundul trebue să fie de 1,2612 ori mai mare decât vrana.

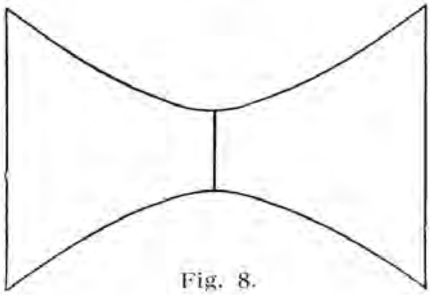

Fig. 8.

Din această observație decurge o consecință însemnată.

12. Dacă în ecuațiunea (12) considerăm pe i ca abscisă şi pe K ca ordonata unui punct mobil, acea ecuație reprezintă şi o curbă de gradul III şi o dreaptă GD paralelă cu OY şi a cărei ecuație este $i=1$.

Să construim partea din această curbă care ne interesează pentru studiul ecuației ce ne ocupă, adică pe cea cuprinsă în unghiul XOY.

Curba taie axa OY în punctul A a cărui ordonanță este $K=\sqrt{\frac{8}{15}}=0{,}7303$ ea are două asimptote paralele cu OX, ale căror ordonante sunt date prin ecuațiunea

$$15\,K^2-30\,K+12=0,$$

de unde

$$K=1\pm\sqrt{\frac{1}{5}}=\begin{cases}1{,}44721.\\0{,}55279.\end{cases}$$

Ceadintâiu, corespunzând la o valoare a lui K mai mare decât 1, nu ne priveşte; cea de a doua dă asimptota BC. Curba trece punctele D şi E ale căror coordonate sunt $i=1$, $K=\frac{2}{3}=$

0,66666 și $i = \frac{1}{2}$, K=0,69312. Deoarece în practică valorile lui i nu variază decât între $\frac{1}{2}$ și 1, e destul a ne ocupa numai de partea ED a curbei. In intervalul acesta și pe toată ramura DF până la infinit se poate admite că curba este convexă către axa OX, ceeace s'ar și putea demonstra analiticește, însă prin un calcul destul de lung.

In practică i fiind totdeauna cuprins între $\frac{1}{2}$ și 1, și K trebuind să fie totdeauna mai mic decât 1, din cele două linii reprezentate de ecuația (12) noi n'avem să considerăm decât partea ED a curbei și partea GL a dreptei, mărginită la punctul

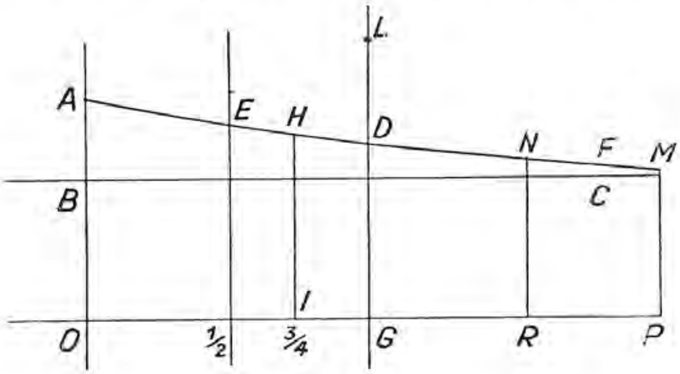

Fig. 9.

L a cărei ordonată e 1. Valorile K=0,625 și K=0,656 nu corespund decât la puncte ale dreptei GL; căci punctele curbei cari au aceste ordonate sunt M și N, ale căror abscise sunt OP=2,4035 și OR=1,2612; ele nu răspund la chestiune. Formulele D-lor Dez și Pisone corespund dar numai la cazul limită, când $i = 1$.

Pentru a avea o valoare a lui K care să corespundă la o valoare a lui i diferită de 1 nu vom putea utiliza dreapta GL, a cărei abcisă constantă este $i = 1$; vom putea însă să ne servim cu partea ED a curbei.

13. Ecuațiunea (11) se poate rezolva în raport cu K și dă

$$i + K\,(1 - i) = \pm\sqrt{\frac{8 + 4i + 3i^2}{15}}.$$

Vom lua semnul plus, căci primul membru e pozitiv; atunci

$$(14) \qquad K = -\frac{i}{1-i} + \frac{\sqrt{8+4i+3i^2}}{\sqrt{15}\,(1-i)},$$

formulă care dă valorile lui K pentru fiecare valoare dată a lui i.

Dacă voim a găsi o valoare pentru K care să reprezinte mai bine decât cele date de D-nii Dez și Pisone realitatea lucrurilor, trebuie ca în (14) să facem pe i egal cu media aritmetică între valorile extreme ce i se dau în practică. Una din aceste limite este $i=1$, care este pentru vasele cilindrice; drept a doua limită putem lua $i=\frac{1}{2}$, deoarece niciodată curbura doagei nu e așa de mare încât diametrul vranei să fie mai mare decât de două ori diametrul fundului. Vom lua dar $i=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, și valoarea corespunzătoare a lui K este 0,6788.

Repet, această valoare a lui K nu are alt avantagiu asupra celor date până aci decât că este mai în acord cu datele practice; însă formula

$$V = 2\pi c[b+0{,}6788(a-b)]^2$$

s'ar raporta tot la un singur caz acela când $i=\frac{3}{4}$, pe când pentru toate celelalte ar da numai rezultate aproximative, care însă ar fi mai aproape de adevăr decât cele date de formulele D-lor Dez și Pisone.

14. **Examinarea formulei lui Oughtred.** — Să egalăm valorile lui V date de formula (2) a lui Orghtred și de formula (9); avem atunci

$$\frac{2\pi c}{15}(8a^2+4ab+3b^2) = \frac{2\pi c}{3}(2a^2+b^2).$$

de unde, făcând toate reducerile,

$$a-b=0,$$

sau

$$i=1.$$

Așa dar, singurul caz când volumul vasului dat calculat după formula lui Oughtred este egal cu al unui vas parabolic de aceleași dimensiuni, este când vasul dat este cilindric.

In loc de formula lui Oughtred, să luăm însă formula mai generală

$$V = \frac{2\pi c}{3}(2a^2 + K'b^2)$$

și să o comparăm cu (9); avem atunci după toate reducerile,

$$8a^2 + 4ab + 3b^2 = 10a^2 + 5K'b^2,$$

sau divizând cu a^2

$$8 + 4i + 3i^2 = 10 + 5Ki^2,$$

de unde $K' = \frac{3i^2 + 4i - 2}{5\,i^2}$.

Dând lui i valoarea mijlocie $\frac{3}{4}$, avem :

$$K' = \frac{43}{45}.$$

Așa dar formula lui Oughtred pentru a corespunde mai bine cu realitatea, ar trebui înlocuită prin cea următoare :

$$V = \frac{2\pi c}{3}\left(2\,a^2 + \frac{43}{45}\,b^2\right).$$

15. **Compararea valorilor lui V date de formulele lui Oughtred, Dez și (9).**

Voi demonstra că valoarea lui V dată de ecuațiunea (9) este totdeauna cuprinsă între valorile date pentru acelaş vas de formulele lui Oughtred și Dez.

Fie a, b, c, dimensiunile unui vas oarecare, V_1 volumul aceluiaş vas calculat după formula lui Oughtred, V_2 și V_3 volumul aceluiaş vas calculat după formula (9), și după formula lui Dez.

Avem :

$$V_1 - V_2 = \frac{2\pi c}{3}(2a^2 + b^2) - \frac{2\pi c}{15}(8a^2 + 4ab + 3b^2) =$$

$$= \frac{2\pi c}{15}(2a^2 + 2b^2 - 4\,ab) = \frac{4\pi c}{15}(a - b)^2$$

Membrul al doilea e o cantitate totdeauna pozitivă; prin urmare avem totdeauna:

$$V_1 > V_2.$$

Avem încă:

$$V_2 - V_3 = \frac{2\pi c}{15}(8a^2+4ab+3b^2) - 2\pi c\left[b+\frac{5}{8}(a-b)\right]^2 =$$

$$= \frac{2\pi c}{960}(137a^2+57b^2-194ab) = \frac{2\pi ca^2}{960}(57i^2-194i+137).$$

Să punem

$$y = 57i^2 - 194i + 137,$$

să considerăm pe i ca abscisă și pe y ca ordonata unui punct și să construim curba reprezentată de această ecuație; această curbă e o parabolă cu axul vertical și cu concavitatea întoarsă spre partea pozitivă a axei oy; ea taie axa $0i$ în punctele ale căror abscise sunt

$$i = 1 \text{ și } i = \frac{137}{57};$$

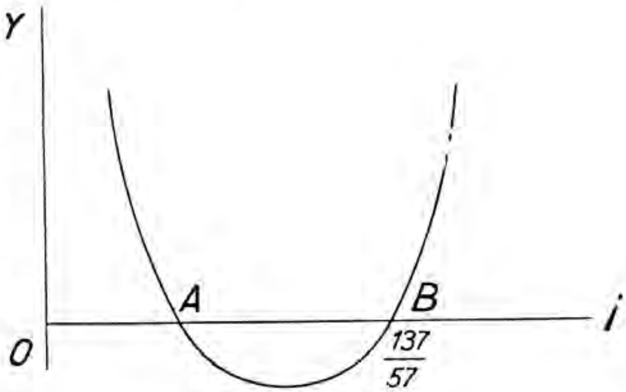

Fig. 10.

Așa dar y nu e negativ decât între valorile 1 și $\frac{137}{57}$ ale lui i; el e pozitiv pentru toate valorile lui i mai mici decât 1. Prinurmare diferența $V_2 - V_3$ este și ea pozitivă pentru toate valorile lui i mai mici decât 1, adică pentru toate cazurile ce se prezintă în practică. Avem dar totdeauna

$$V_1 > V_2 > V_3.$$

16. Deși nu în perfect acord cu realitatea lucrurilor, fiecare din formulele empirice ale lui Oughtred și Dez întrebuințate de atâția ani se poate considera ca dând media între un număr

oarecare de observațiuni. Se știe însă, din elementele calculului probabilităților că dacă V_1 este media unui număr necunoscut, de valori observate ale unei cantități și V_3 media altor valori observate ale aceleiași cantități tot un număr necunoscut, numărul care prezintă cea mai mare probabilitate de a fi valoarea exactă a lui V este media aritmetică a lui V_1 și V_3; însă această medie este cuprinsă între V_1 și V_3; V_2 care și el e cuprins între V_1 și V_3 este mai apropiat de media lor aritmetică decât fiecare din ei și prin urmare prezintă cea mai mare probabilitate de a fi valoarea exactă a lui V.

Vedem dar că afară de considerațiunile expuse și în paragrafele precedente ale acestui Memoriu, valoarea lui V dată de formula (9), care se poate considera ca media observațiunilor făcute în timp de atâția ani de către două popoare de o cultură așa de înaintată, poate fi considerată ca având cele mai multe probabilități de a fi exactă.

17. **Examinarea hipotezei doagei circulare.** — Aici e locul a examina mai de aproape doaga circulară despre care am mai vorbit deja (§ 6).

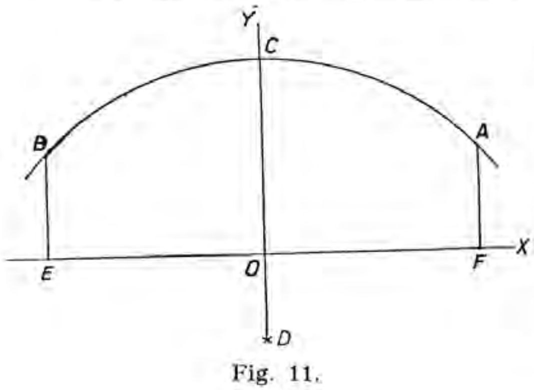

Fig. 11.

Fie AB doaga circulară, al cărei centru e în D; fie OX axul vasului, OC raza vranei, $CO=a$, $AF=b$, $EF=2c$, $OD=g$.

Ecuația arcului ACB este

$$x^2+(y+g)^2=(a+g)^2, \tag{15}$$

iar expresia volumului învelit de ACB

$$V=\pi\int_{-c}^{+c} y^2\,dx.$$

Ecuația (15) dă:

$$y=-g\pm\sqrt{(a+g)^2-x^2},$$

și vom avea semnul $+$, căci y este pozitiv pentru tot arcul ACB; atunci

$$y^2 = g^2 + (a+g)^2 - x^2 - 2g\sqrt{(a+g)^2 - x^2},$$

și prin urmare

$$V = \pi\,[g^2 + (a+g)^2]\int_{-c}^{+c} dx - \pi\int_{-c}^{+c} x^2 dx - 2\pi g\int_{-c}^{+c}\sqrt{(a+g)^2 - x^2}\,dx$$

Insă avem:

$$\int_{-c}^{+c} dx = 2c,\quad \int_{-c}^{+c} x^2 dx = \frac{2c^3}{3},\quad \int\sqrt{(a+g)^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{(a+g)^2 - x^2} +$$

$$+\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{(a+g)^2 - x^2}} = x\sqrt{(a+g)^2 - x^2} + (a+g)^2\int\frac{dx}{\sqrt{(a+g)^2 - x^2}} -$$

$$-\int\sqrt{(a+g)^2 - x^2}\,dx,$$

de unde

$$\int\sqrt{(a+g)^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{(a+g)^2 - x^2} + \frac{(a+g)^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(a+g)^2 - x^2}}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{(a+g)^2 - x^2} + \frac{(a+g)^2}{2}\arcsin\frac{x}{a+g},$$

și $\displaystyle\int_{-c}^{+c}\sqrt{(a+g)^2 - x^2}\,dx = c\sqrt{(a+g)^2 - c^2} + (a+g)^2\arcsin\frac{c}{a+g}.$

Prin urmare

$$V = 2\pi c\,[g^2 + (a+g)^2] - \frac{2\pi c^3}{3} - 2\pi c g\sqrt{(a+g)^2 - c^2} - \tag{16}$$

$$-2\pi g\,(a+g)^2\arcsin\frac{c}{a+g}.$$

Valoarea lui g în funcție de dimensiile lui a, b, c ale vasului se va găsi exprimând că curba ACB trece prin punctul A, ale cărui coordonate sunt c, b; atunci (15) dă:

$$c^2 + (b+g)^2 = (a+g)^2,$$

de unde

$$g = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,(a-b)},\quad a + g = \frac{(a-b)^2 + c^2}{2\,(a-b)}. \tag{17}$$

și va trebui să substituim aceste valori în (16) pentru a avea expresia lui V în funcție de dimensiile vasului.

Precum vedem, în hipoteza doagei circulare, V se exprimă prin o funcție transcendentă și irațională foarte complicată, ceeace ar aduce o mare greutate în construcția tablelor. Insă ceea ce e mai rău este că formula (16) combinată cu (17) nu are avantajul formulei (9) de a cuprinde pe c numai ca factor comun la puterea întâia; precum am spus, această circumstanță este de un foarte mare avantagiu în construcția tablelor, căci permite a le da o dispoziție foarte simplă și un volum destul de mic, ceea ce trebuie mult să se țină în seamă într'o lucrare de felul acesteia.

18. **Calculul, dispoziția și uzul tablelor.** — Pentru toate motivele expuse până aci, eu am admis formula (9) ca exactă și am redus în table. Fie l lungimea vasului, f diametrul fundului, v diametrul vranei; avem:

$$l = 2c, \; f = 2b, \; v = 2\,a;$$

atunci formula (9) devine

$$\text{V} = \frac{\pi l}{60}\,(8\,v^2 + 4vf + 3\,f^3). \tag{18}$$

Tablele sunt calculate din jumătate în jumătate de centimetru pentru fiecare dimensiuni; pentru practică aceasta este de ajuns, căci erorile de măsurat se pot totdeauna ridica până la o jumătate de centimetru pentru fiecare măsurătoare.

Prima tablă însemnată cu o dungă roșie pe marginea paginei, dă logaritmul produsului πl calculat cu cinci zecimale pentru toate valorile lui l între 0,30 m. și 3,50 m.; între aceste limite sunt cuprinse toate lungimile obicinuite ale vaselor, dela cele mai mici până la cele mai mari. Se caută în coloanele verticale însemnate deasupra cu l numărul de centimetri ce are l și în coloana alăturată dinspre dreapta se găsește pe aceeași linie orizontală logaritmul produsului πl.

A doua tablă, care nu e însemnată cu dungă colorată pe marginea paginei dă factorul

$$\frac{8v^2 + 4vf + 3f^2}{60},$$

ea e calculată pentru valorile lui f cuprinse între 0,20 m. şi, 1,75 m. şi pentru valorile lui v cuprinse între f şi $2f$ care nu trec peste 1,75 m.; în adevăr, în practică niciodată nu se iese din aceste limite pentru construcția vaselor.

Această tablă este cu două intrări: în prima coloană verticală dinspre stânga se caută numărul de centimetri cuprins în v, iar în primul rând orizontal numărul de centimetri cuprins în f; la încrucişarea coloanei verticale ce trece prin f cu rândul orizontal ce trece prin v, se găseşte logaritmul numărului: $\frac{8v^2 + 4vf + 3f^2}{60}$, calculat cu cinci zecimale.

Acest logaritm se adună cu cel al produsului πl găsit mai sus; pe urmă în a treia tablă însemnată cu o dungă neagră în coloana intitulată sus L se caută suma lor sau numărul cel mai apropiat de această sumă, şi în coloana alăturată intitulată V găsim volumul căutat al vasului.

Pentru a evita orice dificultate la facerea adunării celor doi logaritmi, s'au evaluat lungimile l, v, f, în decimetri; cu modul acesta fiecare din numerele πl şi $\frac{8v^2+4vf+3f^2}{60}$ sunt mai mari decât 1, şi prin urmare logaritmii lor au caracteristice positive. In tablele I şi II aceşti logaritmi sunt scrişi fără virgulă; aşa că adunarea lor este o simplă operaţie de numere întregi. Tablele negre dau volumul evaluat în litri şi fracțiuni de litri; ele sunt astfel aranjate că pot să dea volumul pânăla un milimetru pentru vasele de mai puțin de zece litri; pânăla un centilitru pentru vasele de 10 pânăla 100 litri; pânăla un decilitru pentru cele de 100 pânăla 1000 litri; pânăla un litru pentru cele de 1000 pânăla 10.000 litri. Cu modul acesta se poate totdeauna avea volumul cu o aproximaţie de cel mult 0,001 din volumul total; o aproximație mai mare ar fi iluzorie, căci erorile de măsurătură, neregularitățile vasului şi hipoteza admisă pentru forma doagei dau desigur loc la o nesiguranță de 0,001 din volumul vasului.

Dungile de diferite culori de pe marginea paginei le-am adoptat pentru a înlesni găsirea tablei necesare şi pentru evitarea confuziunilor.

19. După cum se vede, am făcut toate evaluaţiile, atât de

lungimi cât și de volume, în măsuri metrice. Motivele principale care m'au îndemnat la aceasta sunt două: marea înlesnire ce rezultă pentru calcularea tablelor; și mai ales diversitatea ce există între măsurile întrebuințate dincoace și dincolo de Milcov. Insă pentru a face ca tablele să poată servi chiar cui n'ar avea un metru la dispozițiunea sa, am intercalat o tablă albastră de transformare a măsurilor de lungime, stânjen și coți din ambele părți ale țării, în metru; și o tablă verde de transformare a litrilor în măsuri de capacitate române.

Prin urmare pentru a măsura capacitatea unui vas, se va opera în modul următor: se va măsura lungimea, fundul și vrana vasului, fie în metri, fie în stânjeni sau coți de Muntenia ori de Moldova; în acest din urmă caz, numerele aflate se vor preface în centimetri cu ajutorul tablelor albastre. In tabla roșie, în coloana *l* se caută numărul de centimetri al lungimii vasului, și alături se găsește un număr, care se scrie deoparte.

In tabla albă, se caută paginile în care în primul rând orizontal să se afle numărul de centimetri al fundului și printre aceste pagini se caută aceea în care în prima coloană verticală dela stânga să se găsească numărul de centimetri al vranei; la încrucișerea coloanei verticale și a rândului orizontal ce trece prin aceste numere, se găsește un număr care *se scrie sub cel aflat în tabla roșie și se adună cu dânsul. Această sumă, sau numărul cel mai apropiat de dânsa*, se caută în coloana L a tablelor negre, și alături, în coloana V, se găsește volumul evaluat în litri și funcțiuni de litru. Dacă vrea cineva să aibă acest volum în măsuri române, se va servi cu tabla verde.

Cu modul acesta, orice calcul este înlăturat, și totul se reduce la cel puțin trei și cel mult cinci căutări în table; puțin exercițiu va fi de ajuns pentru a permite persoanei cele mai puțin instruite să învețe a face aceste căutări cu repeziciune și ușurință.

Pe lângă aceasta nu e nevoie de niciun instrument special pentru a face măsurătorile și tablele care nu cuprind mai mult de 200 pagini imprimate în 8^{0}, sunt comode și de un preț relativ mic.

PARTEA DOUĂ.

CALCULUL GOLURILOR.

20. **Ecuația suprafeței vasului.** — Să raportăm vasul la o sistemă de trei axe coordonate astfel alese: vom lua drept axă OX axul vasului, pe care îl vom presupune orizontal; drept axă OZ, o dreaptă perpendiculară pe OX și trecând prin vrană, și vom presupune încă că axa OZ e verticală; în fine drept axă OY o dreaptă perpendiculară pe celelalte două.

Fie ACB doaga parabolică; ecuațiile ei sunt

$$(19) \qquad x^2=2p(a-z), \quad y=0$$

și știm după formula (8) că $p=\dfrac{c^2}{2(a-b)}$.

Suprafața născută de revoluția doagei în jurul axei OX se poate considera ca locul geometric al unei circomferințe de cerc al cărei plan e perpendicular, pe axă, și al cărei centru lunecă în lungul acestei axe, pe când raza își schimbă într'una valoarea astfel ca circomferința să întâlnească totdeauna parabola meridiană. Ecuațiile acestei circomferințe sunt de forma

$$(20) \qquad y^2+z^2=\alpha^2, \quad x=\beta,$$

α și β fiind niște parametre variabile. Condiția ca această circomferință să întâlnească parabola (19) se va obține prin eliminarea lui x, y, z, între ecuațiile (19) și (20), care dă

$$\beta^2=2p(a\mp\alpha).$$

Inlocuind pe α și β cu valorile lor (20), dobândim

$$x^2=2p(a\mp\sqrt{y^2+z^2}),$$

care este ecuația căutată a suprafeței de revoluție. Această suprafață e compusă din o parte închisă, a cărei meridiană este GCFC′, și din două părți în formă de cornete care se întind la infinit la dreapta de punctul F și la stânga de G.

Abscisele punctelor F și G se vor obține făcând $y=z=0$ în ecuațiunea precedentă, ceea ce dă

$$x^2=\mathrm{OF}^2=\mathrm{OG}^2=2pa.$$

Suprafaţa întreagă a vasului, BAA′B′, fiind cuprinsă între punctele F şi G abscisele tuturor punctelor sale sunt mai mici

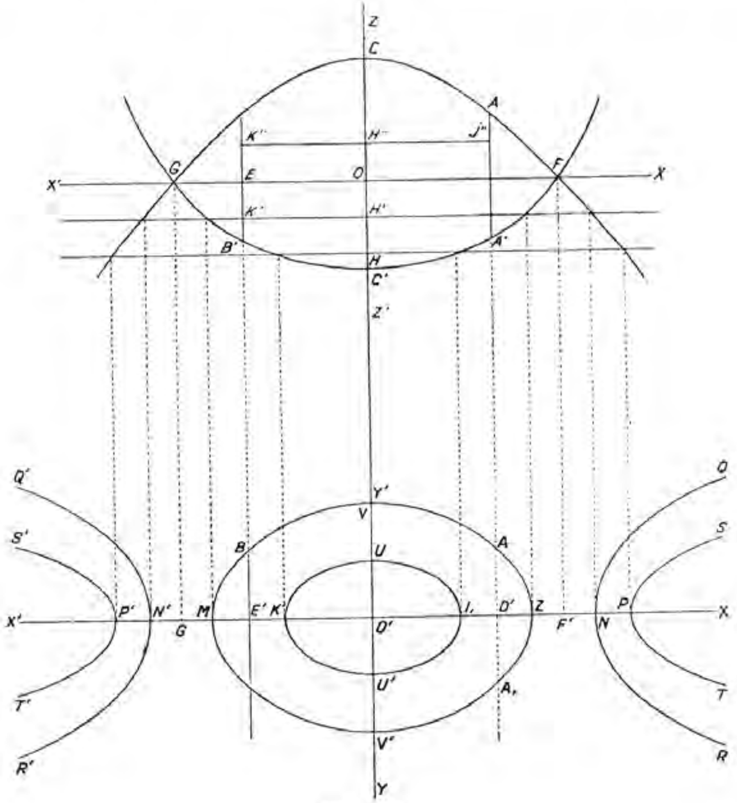

Fig. 12.

decât OF şi OG, şi fiindcă *p* este pozitiv, urmează că suprafaţa vasului este reprezentată prin ecuaţia

$$x^2 = 2p(a - \sqrt{y^2 + z^2}), \tag{21}$$

care se poate pune şi sub forma

$$4p^2(y^2 + z^2) = 2pa - x^2)^2. \tag{22}$$

Suprafaţa considerată este deci de gradul al patrulea.

21. **Volumul cuprins între suprafaţa vasului şi un plan orizontal.** — Vom considera numai cazul, singurul obicinuit în practică, când axul vasului este orizontal, atunci, dacă el este plin în

parte cu un lichid suprafaţa liberă a acestui lichid este un plan orizontal, şi prin urmare paralel cu planul xoy. Analiza permite a trata şi cazul general când axul vasului are o poziţie oarecare; însă calculul este mai complicat şi afară de aceasta consideraţia cazului general nu este de nici o utilitate în practică.

Ecuaţia suprafeţei libere a lichidului este

$$z' = h, \tag{23}$$

h fiind distanţa OH a nivelului dela planul XOY.

Să presupunem că nivelul lichidului este dedesuptul planului XOY, adică că h este negativ. Cazul când nivelul ar fi deasupra lui XOY se reduce lesne la cel precedent; în adevăr, fie V volumul total al vasului, V′ partea acestui volum situată dedesuptul planului I″K″, care este deasupra lui XOY, V″ partea de deasupra planului I″ K″. Avem:

$$V = V' + V''.$$

Dacă însă luăm planul I′K′ astfel că OH″=OH′, volumul V″ este egal cu volumul I′K′B′C′A′, în virtutea simetriei; prin-urmare

$$V = V' + I'K'B'C'A',$$

de unde

$$V' = V - I'K'B'C'A',$$

ecuaţie care dă pe V′ dacă I′K′B′C′A′ este cunoscut, căci V este aflat (formula 9).

Să ne ocupăm dar numai de determinarea volumului, când h este negativ.

22. Expresia volumului cuprins între suprafaţa vasului, a cărei ecuaţie este (22) şi planul

$$z' = -h$$

este

$$V = \int\int (z - z')\, dxdy.$$

Insă z este negativ, căci volumul considerat se află întreg dedesuptul planului XOY; punând semnul lui z în evidenţă, substituind $-h$ în locul lui z' şi luând valoarea absolută a lui V, avem:

$$V = \int\int (z - h)\ dxdy, \quad \text{sau} \quad (24)\ V = \int dx \int (z - h) dy,$$

ecuaţie în care z va trebui înlocuit cu valoarea sa în funcţie de x şi y scoasă din (22).

Să precizăm acum limitele celor două integrale. Făcând $z = -h$ în ecuația (22) a suprafeței vasului, dobândim ecuația.

$$4p^2(y^2 + h^2) = (2pa - x^2)^2, \tag{25}$$

care reprezintă proiecția orizontală a intersecției suprafeței vasului cu suprafața liberă a lichidului. Curba reprezentată prin această ecuație este de gradul al patrulea; ea e formată din o buclă închisă cum e $I_1UK_1U_1'$ și din două ramuri infinite, SPT și S'P'T', care se întind la infinit către dreapta și către stânga; noi nu avem a ne ocupa decât de bucla închisă, înăuntrul căreia se proiectează tot volumul considerat.

Considerând mai întâiu pe x ca constant, ecuația (25) dă

$$y = \pm\sqrt{\frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2} - h^2};$$

acestea sunt valorile ordonatelor curbei orizontale corespunzătoare la aceeași valoare a lui x, și integrala

$$\int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2} - h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2} - h^2}} (z-h)dy$$

reprezintă aria secțiunii întregi făcute în volumul lichidului de planul $X = x$, iar

$$dx\int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2} - h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2} - h^2}} (z-h)\,dy \tag{26}$$

este volumul unui cilindru infinit de mic având drept bază acea secțiune și drept înălțime pe dx. Pentru a găsi volumul căutat al lichidului va trebui să integrăm acum în raport cu x între limitele corespunzătoare la limitele volumului de lichid cuprins în vas.

Aci se prezintă două cazuri :

1^0. Dacă nivelul lichidului rămâne mai jos de gardinul B'A', nivelul lichidului taie parabola meridiană în punctele K și I, pentru care abscisa este cea mai mare dintre toate punctele secțiunii IK ; aceste abscise se vor găsi făcând $z=-h$ în ecuația

$$x^2 = 2p(a + z)$$

a parabolei FC'G ; găsim astfel

$$x^2 = 2p(a - h),$$

de unde

$$x = \pm\sqrt{2p(a - h)},$$

și înlocuind pe $2p$ cu valoarea sa (8)

$$x = \pm\, c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}.$$

Acestea sunt limitele integralei în raport cu x a expresiei (26) când nivelul lichidului în vas nu trece de gardin.

2^0. Dacă nivelul lichidului trece de gardinul A'B', valorile extreme ale lui x sunt $-c$ și $+c$, și acestea sunt și limitele integralei expresiei (26) în cazul acesta.

Avem dar aceste două expresiuni pentru volumul căutat :

$$(27)\qquad V = \int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}} (z-h)dy,$$

dacă nivelul nu trece de gardin ; și

$$(28)\qquad V = \int_{-c}^{+c} dx \int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}} (z-h)dy,$$

dacă nivelul trece de gardin.

23. Să efectuăm acum aceste integrări.

Avem mai întâi pentru integrala indefinită :

$$\int(z-h)dy=\int zdy-h\int dy.$$

Insă

$$h\int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}} dy=2h\sqrt{\frac{(2pa-x\,)^2}{4p^2}-h^2}$$

Rămâne a afla pe

$$\int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}} zdy$$

Să considerăm deocamdată integrala indefinită

$$\mathrm{I}=\int zdy,$$

în care pe z trebuie să-l înlocuim prin valoarea sa

$$z=\sqrt{\frac{(2pa-x\,)^2}{4p^2}-y^2},$$

scoasă din ecuația (22) a suprafeței. Luăm radicalul cu plus, pentrucă am ținut deja mai sus seama de semnul lui z (§22). Avem dar :

$$\mathrm{I}=\int dy\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-y^2},$$

şi x trebuie considerat ca constant în această integrală ; avem dar :

$$\mathrm{I}=\frac{2pa-x^2}{2p}\int\sqrt{1-\frac{4p^2y^2}{(2pa-x^2)^2}}\,dy.$$

Să punem pentru înlesnire

$$\frac{2py}{2pa-x^2}=\eta,$$

de unde

$$dy = \frac{2pa - x^2}{2p} d\eta;$$

atunci

$$I = \frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2} \int \sqrt{1 - \eta^2} d\eta.$$

Insă

$$\int \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta = \eta\sqrt{1-\eta^2} + \int \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$= \eta\sqrt{1-\eta^2} - \int \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta + \int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

de unde

$$\int \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta = \frac{1}{2}\eta\sqrt{1-\eta^2} + \frac{1}{2} \text{ arc sin } \eta.$$

Prin urmare

$$I = \frac{(2pa - x^2)^2}{8p^2} [\eta\sqrt{1-\eta^2} + \text{arc sin } \eta].$$

Să găsim acum valoarea integralei definite. Pentru aceasta trebuie în valoarea precedentă să înlocuim pe η cu valoarea sa

$$\eta = \frac{2py}{2pa - x^2},$$

și pe y cu valorile sale

$$+\sqrt{\frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2} - h^2} \quad \text{și} \quad -\sqrt{\frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2} - h^2}$$

la cele două limite, și să scădem valorile găsite una din alta. Avem astfel:

la limita superioară, $\eta = \frac{2p}{2pa - x^2}\sqrt{\frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2} - h^2};$

la limita inferioară, $\eta = \frac{-2p}{2pa - x^2}\sqrt{\frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2} - h^2}.$

Aşa dar, vom avea :
la limita superioară,

$$\eta\sqrt{1-\eta^2}=\frac{2p}{2pa-x^2}\sqrt{\frac{2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}.\sqrt{1-1+\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}}$$

$$=\frac{4p^2h}{(2pa-x^2)^2}\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2},$$

$$\text{arc sin }\eta=\text{arç sin}\left[\frac{2p}{2pa-x^2}\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}\right]$$

$$=\text{arc sin}\left(\sqrt{1-\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}}\right);$$

la limita inferioară,

$$\eta\sqrt{1-\eta^2}=\frac{-2p}{2pa-x^2}\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}.\sqrt{1-1+\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)}}=$$

$$-\frac{4p^2h}{(2pa-x^2)^2}\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-}$$

$$\text{arc sin }\eta=\text{arc sin}\left[-\frac{2p}{2pa-x^2}\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}\right]=$$

$$-\text{arc sin}\left[\sqrt{1-\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}}\right]$$

Aşa dar vom avea valoarea integralei definite :

$$\int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}} zdy=\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}\left[\frac{4p^2h}{(2pa-x^2)^2}\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}+\text{arc sin}\left(\sqrt{1-\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}}\right)\right]=$$

$$h\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}+\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}\text{arc sin}\sqrt{1-\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}};$$

și prin urmare

$$\int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}} (z-h)dy = \frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2} \arcsin \sqrt{1-\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}} - h\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}$$

sau

$$\int_{-\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}}^{+\sqrt{\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2}-h^2}} (z-hdy = \frac{h^2(2pa-x^2)^2}{4p^2h^2} \arcsin \sqrt{1-\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}} - \frac{h^2(2pa-x^2)}{2ph}\sqrt{1-\frac{4p^2h^2}{(2pa-x^2)^2}}.$$

Să însemnăm cu X valoarea acestei integrale definite; atunci volumul, când nivelul e sub gardin, e dat prin formula

$$V = \int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} X\,dx ,$$

și când nivelul trece de gardin prin formula

$$V = \int_{-c}^{+c} X\,dx.$$

Aceste două formule se reduc la una singură

$$V = \int_{-c\gamma}^{+c\gamma} Xdx, \tag{29}$$

în care vom face $\gamma = \sqrt{\frac{a-h}{a-b}}$ când nivelul este dedesuptul gardinului, și $\gamma=1$ când nivelul trece de gardin.

24. Integrala $\int X dx$ nu se poate calcula decât prin serii. Să punem

$$\frac{2pa-x^2}{2ph}=\frac{1}{\xi}; \tag{30}$$

atunci

$$X=\frac{h^2}{\xi^2}\operatorname{arc}\sin\sqrt{1-\xi^2}-\frac{h^2}{\xi}\sqrt{1-\xi^2}$$

Insă

$$\operatorname{arc}\sin\sqrt{1-\xi^2}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\sin\xi;$$

deci

$$X=\frac{\pi h^2}{2\xi^2}-\frac{h^2}{\xi^2}\operatorname{arc}\sin\xi-\frac{h^2}{\xi}\sqrt{1-\xi^2}. \tag{31}$$

In această expresiune, cantitatea ξ este totdeauna mai mică decât 1, sau cel mult egală cu 1 pentru toate valorile lui x cuprinse între limitele integralei $\int X dx$. In adevăr, dacă nivelul este dedesuptul gardinului, avem, între limitele acestei integrale,

$$x\leqslant c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}},$$

de unde

$$x^2\leqslant\frac{c^2(a-h)}{a-b},$$

şi fiindcă $2p=\dfrac{c^2}{a-b}$,

$$x^2\leqslant 2p\,(a-h),$$

sau

$$2pa-x^2\geqslant 2ph,$$

şi prin urmare, după relaţia (30),

$$\xi\leqslant 1.$$

Dacă nivelul trece de gardin,

$$x\leqslant c,\quad x^2\leqslant c^2,$$

sau

$$x^2\leqslant 2\,(ap-b)$$

de unde

$$2pb \leqslant 2pa - x^2$$

și *a fortiori*

$$2ph \leqslant 2pa - x^2,$$

căci $h \leqslant b$ când nivelul trece de gardin; așa dar și în cazul acesta

$$\xi \leqslant 1.$$

De aci urmează că putem aplica lui $\arcsin \xi$ și $\sqrt{1-\xi^2}$ desvoltările în serii cunoscute:

$$(a) \quad \arcsin \xi = \frac{\xi}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\xi^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\xi^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\xi^7}{7} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{\xi^{2n+1}}{2n-1} + \ldots.$$

$$(b) \quad \sqrt{1-\xi^2} = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1.1}{2.4}\xi^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\xi^6 - \ldots - \frac{1.1.3.5..(2n-3)}{2.4.6.8..(2n)}\xi^{2n} - \ldots$$

căci aceste serii sunt convergente pentru toate valorile lui ξ mai mici decât 1.

Ele sunt convergente și pentru $\xi = 1$; acesta este ştiut din tratatele de calcul infinitesimal pentru cea dintâiu; cât pentru cea de a doua, se ştie că suma seriei

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \ldots + (-1)^p \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} - \ldots$$

tinde către zero când m este pozitiv. Pentru demonstrarea acestei proprietăți se poate vedea *Frenet, Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal,* chestiunea (7).

Făcând $m = \frac{1}{2}$, această serie devine

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} - \frac{1.1.3}{2.4.6} - \ldots,$$

care este chiar membrul al doilea al ecuației (*b*) când facem într'însul $\xi = 1$; așa dar acest membru al doilea are drept sumă zero pentru $\xi = 1$, care este tocmai valoarea lui $\sqrt{1-\xi^2}$ pentru $\xi = 1$; ecuația (*b*) subsistă dar și pentru $\xi = 1$.

Să aplicăm prin urmare desvoltările (*a*) și (*b*) termenilor valorii (31) a lui X; avem:

$$X=\frac{\pi h^2}{2\xi^2}-h^2\left[\frac{1}{\xi}+\frac{1}{2}\;\frac{\xi}{3}+\frac{1.3}{2.4}\;\frac{\xi^3}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\;\frac{\xi^5}{7}+\ldots\right.$$

$$(32)\qquad\qquad \left.+\;\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\;\frac{\xi^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right]$$

$$-h^2\left[\frac{1}{\xi}-\frac{1}{2}\xi-\frac{1.1}{2.4}\xi^3-\frac{1.1.3}{2.4.6}\xi^5-\ldots-\frac{1.1.3.5.(2n-3)}{2.4.6.8.(2n)}\xi^{2n-1}-\ldots\right],$$

și reducând în unul singur termenii asemeni,

$$X=\frac{\pi h^2}{2\xi^2}-2h^2\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3}\xi-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{3.5}\xi^3-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{5.7}\xi^5-\ldots\right.$$

$$\left.-\;\frac{1.3.5.(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\;\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\xi^{2n+1}-\ldots\right].$$

Această serie este mai convergentă decât fiecare din seriile ce intră în ecuația (32) căci termenii săi sunt mai mici decât termenii corespunzători ai acelora.

Inlocuind pe ξ cu valoarea sa dată de (30), X ia forma

$$(33)\qquad X=\frac{\pi h^2}{2}\,\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2h^2}-2h^2\,\frac{2pa-x^2}{2ph}-2h^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..(2n)}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\;\frac{(2ph)^{2n-1}}{(-2pa+x^2)^{2n-1}}$$

25. Acum trebuie a înmulți această ecuațiune cu dx și a integra între limitele $x=-c\gamma$ și $x=+c\gamma$.

Integrarea celor doi dintâiu termeni se face fără nici o dificultate și dă:

$$\frac{\pi h^2}{2}\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2h^2}\,dx=\frac{\pi c\gamma}{4p^2}\left[4p^2a^2-\frac{4pa}{3}c^2\gamma^2+\frac{c^4\gamma^4}{5}\right],$$

$$-2h^2\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{2pa-x^2}{2ph}\,dx=-\frac{2hc\gamma}{p}\left[2pa-\frac{c^2\gamma^2}{3}\right],$$

și dacă înlocuim pe p cu valoarea sa $\frac{c^2}{3(a-b)}$ și facem reducerile,

$$(34)\begin{cases} \dfrac{\pi h^2}{2}\displaystyle\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\dfrac{(2pa-x^2)^2}{4p^2h^2}dx=\pi c\gamma\left[a^2-\dfrac{2}{3}a(a-b)\gamma^2+\dfrac{1}{5}(a-b)^2\gamma^4\right], \\ -2h^2\displaystyle\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\dfrac{2pa-x^2}{2ph}dx=-4ch\gamma\left[a-\dfrac{1}{3}(a-b)\gamma^2\right]. \end{cases}$$

In acești termeni, după cum știm, va trebui să facem $\gamma=\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}$ dacă volumul considerat de lichid este mai jos de gardin, și $\gamma=1$ în cazul contrar; vom avea dar, în fiecare din aceste cazuri:

$$(35)\begin{cases} \dfrac{\pi h}{2}\displaystyle\int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}\dfrac{(2pa-x^2)^2}{4p^2h^2}dx=\dfrac{\pi c}{15}\sqrt{\dfrac{a-h}{a-b}}(8a^2+4ah+3h^2), \\ -2h^2\displaystyle\int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}\dfrac{2pa-x^2}{2ph}dx=-\dfrac{4}{3}c\sqrt{\dfrac{a-h}{a-b}}(h^2+2ah) \end{cases}$$

$$(36)\begin{cases} \dfrac{\pi h^2}{2}\displaystyle\int_{-c}^{+c}\dfrac{(2pa-x^2)^2}{4p^2h^2}dx=\dfrac{\pi c}{15}(8a^2+4ab+3b^2) \\ -2h^2\displaystyle\int_{-c}^{+c}\dfrac{2pa-x^2}{2ph}dx=-\dfrac{4}{3}c(bh+2ah). \end{cases}$$

26. Rămâne a efectua integrarea celorlalţi termeni ai lui X. Aceşti termeni vor da integrale de forma

$$[37] \qquad -2h^2 \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \cdot \frac{(2ph)^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)} \int \frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}$$

Să lăsăm deocamdată la o parte factorul constant şi să ne ocupăm numai de integrală. Numitorul expresiunii de sub semnul $\int$ are două rădăcini multiple de ordinul $2n-1$, şi anume : $x=+\sqrt{2pa}$ şi $x=-\sqrt{2pa}$; prin urmare fracţia $\frac{1}{(x^2-2pa)^{2n-1}}$ se poate descompune în modul următor :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(x^2-2pa)^{2n-1}} &= \frac{A_1}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-1}} + \frac{A_2}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-2}} \\ &+ \frac{A_3}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-3}} + ... + \frac{A_{2n-1}}{x-\sqrt{2pa}} + \frac{B_1}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-1}} \\ &+ \frac{B_2}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-2}} + \frac{B_3}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-3}} + ... + \frac{B_{2n-1}}{x+\sqrt{2pa}}, \end{aligned} \right.$$

A_1, A_2, ... B_{2n-1} fiind constante pe care trebuie să le determinăm.

Fie fracţiunea $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, $\varphi(x)$ şi $f(x)$ fiind nişte polinoame întregi în x, şi gradul lui φ fiind mai mic decât al lui f, fie$_1$ x o rădăcină multiplă de ordinul $2n-1$ a lui $f(x)$. Se ştie că fracţiunea $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ se poate descompune în modul următor :

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^{2n-1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{2n-2}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{2n-3}} + ... + \frac{A_{2n-1}}{x-x_1} + \frac{\varphi(x)}{f_1(x)},$$

φ fiind un polinom întreg în x şi $f_1(x) = \frac{f(x)}{(x-x_1)^{2n-1}}$ Coeficienţii $A_1 \ldots A_{2n-1}$ se determină prin ecuaţiile următoare:

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi(x_1) - A_1 \frac{f^{(2n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(2n-1)} = 0,\\
&\frac{\varphi'(x_1)}{1} - A_1 \frac{f^{(2n)}(x_1)}{1.2\ldots(2n)} - A_2 \frac{f^{(2n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(2n-1)} = 0,\\
&\frac{\varphi''(x_1)}{1.2} - A_1 \frac{f^{(2n+1)}(x_1)}{1.2\ldots(2n+1)} - A_2 \frac{f^{(2n)}(x_1)}{1.2\ldots(2n)}\\
&\qquad\qquad - A_3 \frac{f^{(2n-1)}(x')}{1.2\ldots(2n-1)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\varphi^{(2n-2)}(x_1)}{1.2\ldots(2n-2)} - A_1 \frac{f^{(4n-3)}(x_1)}{1.2\ldots(4n-3)} - A_2 \frac{f^{(4n-4)}(x_1)}{1.2\ldots(4n-4)}\\
&\quad - A_3 \frac{f^{(4n-5)}(x_1)}{1.2\ldots(4n-5)} - \ldots - A_{2n-1} \frac{f^{(2n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(2n-1)} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Fracţiunea propusă fiind $\dfrac{1}{(x^2-2pa)^{2n-1}}$ avem:

$x_1 = +\sqrt{2pa}$, $\varphi\left(\sqrt{2pa}\right) = 1$, $\varphi'\left(\sqrt{2pa}\right) = 0 \ldots\ldots \varphi^{(2n-2)}\left(\sqrt{2pa}\right) = 0$,
apoi: $f(x) = (x^2-2pa)^{2n-1} = \left(x-\sqrt{2pa}\right)^{2n-1}\left(x+\sqrt{2pa}\right)^{2n-1}$.

Fie u, v, două funcţiuni oarecare de o variabilă independentă; Leibnitz a dat o formulă care permite a găsi derivatele succesive ale produsului uv; această formulă este:

$$
d^m(uv) = ud^m v + \frac{m}{1} dud^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} d^2ud^{m-2}v + \ldots\ldots
$$

$$
+ \frac{m}{1} d^{m-1} udv + vd^m u.
$$

Făcând în această formulă $u = \left(x-\sqrt{2pa}\right)^{2n-1}$, $v = \left(x+\sqrt{2pa}\right)^{2n-1}$, şi pe m succesiv egal cu $2n-1$, $2n$, $2n+1, \ldots, 4n-3$, pe urmă în rezultate înlocuind pe x cu $\sqrt{2pa}$ şi observând că toţi termenii care vor conţine derivatele factorului $\left(x-\sqrt{2pa}\right)^{2n-1}$ de un ordin mai mic decât $2n-1$ se anulează după această substituire, vom dobândi:

$$
f^{(2n-1)}\left(\sqrt{2pa}\right) = (2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1.\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n-1}
$$

$$f^{(2n)}\left(\sqrt{2pa}\right) = \frac{2n}{1}(2n-1).(2n-1)(2n-2)....3.2.1\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n-2}$$

$$f^{(2n+1)}\left(\sqrt{2pa}\right) = \frac{(2n+1)(2n)}{1.2}\cdot(2n-1)(2n-2).(2n-1)(2n-2)....$$
$$3.2.1.\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n-3}$$

$$f^{(2n+2)}\left(\sqrt{2pa}\right) = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)}{1.2.3.}.(2n-1)(2n-2)(2n-3)$$
$$(2n-1)(2n-2)...3.2.1\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n-4},$$

. . . .

$$f^{(4n-3)}\left(\sqrt{2pa}\right) = \frac{(4n-3)(4n-4)...(2n)}{1.2.3....(2n-2)}\cdot(2n-1)(2n-2)....3.2.$$
$$(2n-1)(2n-2)...3.2.1\left(2\sqrt{2pa}\right).$$

Aceste diferite valori trebuie substituite în ecuațiile (39), care vor da atunci pe A_1, A_2, ... A_{2n-1}.

Se poate vedea că coeficienții B_1, B_2, ... B_{2n-1} care figurează în descompoziția (38) se vor găsi tot ca și A_1, A_2, ...A_{2n-1} înlocuind însă pretutindeni pe $\sqrt{2pa}$ prin $-\sqrt{2pa}$.

Făcând aceste diferite operații, vom avea în fine :

$$(40)\quad\left\{\begin{aligned}
A_1 &= -B_1 = \frac{1}{\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n-1}},\\
A_2 &= B_2 = -\frac{2n-1}{1}\ \frac{1}{\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n}},\\
A_3 &= -B_3 = \frac{(2n-1)(2n)}{1.2.}\ \frac{1}{\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n+1}},\\
A_4 &= B_4 = -\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1.2.3}\ \frac{1}{\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n+2}},\\
A_5 &= -B_5 = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2)}{1.2.3.4}\ \frac{1}{\left(2\sqrt{2pa}\right)^{2n+3}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{2n-2} &= B_{2n-2} = -\frac{(2n-1)(2n)...(4n-5)}{1.2.3....(2n-3)}\ \frac{1}{\left(2\sqrt{2pa}\right)^{4n-4}}\\
A_{2n-1} &= -B_{2n-1} = \frac{(2n-1)(2n)..(4n-4)}{1.2.3...(2n-2)}\ \frac{1}{\left(2\sqrt{2pa}\right)^{4n-3}}.
\end{aligned}\right.$$

Substituind aceste valori în desvoltarea (38), vom avea:

$$\frac{1}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=\frac{1}{(2\sqrt{pa})^{2n-1}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-1}}-\frac{1}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-1}}\right]$$

$$-\frac{2n-1}{1}\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{2n}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-2}}+\frac{1}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-2}}\right]$$

$$+\frac{(2n-1)(2n)}{1.2}\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{2n+1}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-3}}-\frac{1}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-3}}\right]$$

$$-\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1.2.3}\frac{1}{(2\sqrt{2pa.})^{2n+2}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-4}}+\frac{1}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-4}}\right]$$

. . . .

$$-\frac{(2n-1)(2n)...(4n-5)}{1.2.3...(2n-3)}\frac{1}{(2\sqrt{2po})^{4n-4}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{2pa})^2}+\frac{1}{(x+\sqrt{2pa})^2}\right]$$

$$+\frac{(2n-1)(2n)...(4n-4)}{1.2.3....(2n-2)}\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{4n-3}}\left[\frac{1}{x-\sqrt{2pa}}-\frac{1}{x+\sqrt{2pa}}\right],$$

care se poate scrie, sub o formă prescurtată

$$(41)\quad \frac{1}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=\sum_{q=1}^{q=2n-1}\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)...(2n-3+q)}{1.2.3....(q-1)}$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{2n-2+q}}\left[\frac{(-1)^{q-1}}{(x-\sqrt{2pa})^{2n-q}}-\frac{(+1)^{q-1}}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-q}}\right],$$

dacă facem convenția ca pentru $q=1$ să înlocuim coeficientul $\frac{(2n-1)(2n)...(2n-3+q)}{1.2.3....(q-1)}$ prin 1.

27. Trebuie acum să înmulțim expresia (41) cu dx și să o integrăm, ceea ce se poate face fără nici o dificultate, și avem:

$$\int\frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)...(2n-3+q)}{1.\ 2.\ 3...\ (q-1)}$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{qn-2+q}}\frac{1}{(2n-q-1)}\left[\frac{(+1)^2}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}+\frac{(-1)^q}{(x+\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}\right]$$
$$-\frac{(2n-1)(2n)\dots(4n-4)}{1.2.3\dots.(2n-2)}\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{4n-3}}\alpha\frac{\sqrt{2pa+x}}{\sqrt{2pa-x}}.$$

Luând integrala definită între limitele $x=+c\gamma$ și $x=-c\gamma$,

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)\,(2n)\,(2n+1)\dots(2n-3+q)}{1.2.3\dots\dots(q-1)}$$
$$\times\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{2n-2+q}}\frac{1}{(2n-q-1)}$$
$$\left[\frac{(+1)^q}{(c\gamma+\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}-\frac{(+1)^q}{(-c\gamma+\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}+\frac{(-1)^q}{(c\gamma-\sqrt{2pa})^{2n-1+q}}-\right.$$
$$\left.\frac{(-1)^q}{(-c\gamma-\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}\right]-\frac{(2n-1)(2n)\dots(4n-4)}{1.2.3\dots(2n-2)}\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{4n-3}}\times$$
$$\left[\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2pa+c\gamma}}{\sqrt{2pa-c\gamma}}-\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2pa-c\gamma}}{\sqrt{2pa}+c\gamma}\right]$$

Insă

$$\frac{(+1)^q}{(c\gamma+\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}-\frac{(-1)^q}{(-c\gamma-\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}=\frac{(+1)^q}{(\sqrt{2pa}+c\gamma)^{2n-1-q}}-$$
$$\frac{(-1)^q}{(\sqrt{2pa}+c\gamma)^{2n-1-q}(-1)^{2n-1-q}}=\frac{(+1)^q}{(\sqrt{2pa}+c\gamma)^{2n-1-q}}-$$
$$\frac{(-1)^{2q-2n+1}}{(\sqrt{2pa}+c\gamma)^{2n-1-q}}=\frac{2}{(\sqrt{2pa}+c\gamma)^{2n-1-q}},\quad\frac{(-1)^q}{(c\gamma-\sqrt{2pa})^{2n-1-q}}-$$
$$\frac{(+1)^q}{(\sqrt{2pa}-c\gamma)^{2n-1-q}}=\frac{(-1)^{2q-2n+1}}{(\sqrt{2pa}-c\gamma)^{2n-1-q}}-\frac{(+1)^q}{(\sqrt{2pa}-c\gamma)^{2n-1-q}}$$
$$=-\frac{2}{(\sqrt{2pa}-c\gamma)^{2n-1-q}},\quad\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2pa}+c\gamma}{\sqrt{2pa}-c\gamma}-\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2pa}-c\gamma}{\sqrt{2pa}+c\gamma}=$$
$$\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2pa}+c\gamma}{\sqrt{2pa}-c\gamma}+\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2pa}+c\gamma}{\sqrt{2pa}-c\gamma}=2\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2pa}+c\gamma}{\sqrt{2pa}-c\gamma},$$

și însemnând cu log. logaritmii luați în sistemul decimal

$$2\,\mathrm{L}\frac{\sqrt{2pa}+c\gamma}{\sqrt{2pa}-c\gamma}=\frac{-2}{\log e}\log\frac{\sqrt{2pa}-c\gamma}{\sqrt{2pa}+c\gamma}$$

Așa dar, avem în fine:

$$(42)\quad \int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)\ldots(2n-3+q)}{1.2.3\ldots(q-1)}$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{2n-2+q}}\frac{2}{(2n-q-1)}\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt{2pa}+c\gamma)^{2n-1-q}}\;\frac{1}{(\sqrt{2pa}-c\gamma^{2n-1-q})}\right]$$

$$+\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)\ldots(4n-4)}{1.2.3\ldots(2n-2)}\frac{2}{(2\sqrt{2\rho a})^{4n-3}}\,\mathrm{L}\frac{\sqrt{2pa}-c\gamma}{\sqrt{2pa}+c\gamma},$$

sau

$$(42\text{ bis})\quad \int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)(2n)\ldots(2n-3+q)}{1.2.3\ldots(q-1)}$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{2n-2+q}}\frac{2}{2n-q+1}\left[\frac{1}{(\sqrt{2pa}+c\gamma)^{2n-1-q}}\;\frac{1}{(\sqrt{2pac}-c\gamma)^{2n-1-q}}\right]$$

$$+\frac{(2n-1)(2n)\ldots(4n-4)}{1.2.3\ldots(2n-2)}\frac{1}{(2\sqrt{2pa})^{4n-3}}\frac{2}{\log e}\log\frac{\sqrt{2pa}-c\gamma}{\sqrt{2pa}+c\gamma}.$$

Aceste integrale intră în expresia lui $\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\mathrm{X}dx$ cu coeficientul

$$-2h^2\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{(2\rho h)^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}.$$

28. Să considerăm expresia

$$(2ph)^{2n-1}\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}$$

şi să înlocuim într'însa pe $2p$ cu valoarea sa $\dfrac{c^2}{a-b}$; vom avea:

$$(2ph)^{2n-1}\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)(2n)\ldots(2n-3+q)}{1.2.3\ldots(q-1)}\left(\frac{c^2h}{a-b}\right)^{2n-1}$$

$$\frac{1}{2^{2n-2+q}}\left(\frac{a-b}{c^2a}\right)^{\frac{2n-2+q}{2}}\frac{2}{2n-q-1}\left(\frac{a-b}{c^2a}\right)^{\frac{2n-1-q}{2}}\left(\frac{1}{\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}\right)+\frac{(2n-1)(2n)(4n-4)}{1.2.3\ldots(2n-2)}\left(\frac{c^2h}{a-b}\right)^{2n-1}\frac{1}{2^{4n-3}}\times$$

$$\times\left(\frac{a-b}{c^2a}\right)^{\frac{4n-3}{2}}\frac{2}{\log e}\log\frac{1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}{1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}},$$

şi făcând reducerile şi scoţând de sub semnul Σ factorii care nu depind de q şi care prin urmare sunt comuni,

$$(43)\left\{\begin{aligned}&(2ph)^{2n-1}\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{dx}{(x^2-2pa)^{2n-1}}=-c\sqrt{\frac{a}{a-b}}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n-1}\\&\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{2n-1)}{1.}\,\frac{(2n)\ldots(2n-3+q)}{2.3\ldots(q-1)}\,\frac{1}{2^{2n-2+1}}\,\frac{2}{2n-q-1}\times\\&\times\left(\frac{1}{\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}-\frac{1}{\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}\right)\\&-c\sqrt{\frac{a}{a-b}}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n-1}\frac{(2n-1)(2n)\ldots(4n-4)}{1.2.3\ldots\quad(2n-2)}.\frac{1}{2^{4n-3}}\,\frac{2}{\log e}\times\\&\times\log\frac{1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}{1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}.\end{aligned}\right.$$

Când vasul este cilindric, adică când $a=b$, această expresie s'ar părea că devine infinită, din cauza factorului comun $\sqrt{\frac{a}{a-b}}$; e lesne însă a ne convinge că acest factor dispare.

In adevăr, în termenii cuprinşi sub semnul $\sum$, dacă reducem la acelaş numitor fracţiile din paranteză, avem:

$$\frac{1}{\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}-\frac{1}{\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}=$$

$$\frac{\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}-\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}{\left(1-\gamma^{2}\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}};$$

desvoltând prin formula binomului pe fiecare din puterile dela numărător, termenii de rang fără soţ vor dispărea şi cei ce vor rămâne vor conţine ca factor comun pe $\sqrt{\frac{a-b}{a}}$, care se va reduce cu factorul comun $\sqrt{\frac{a}{a-b}}$. In termenul din urmă avem:

$$\mathrm{L}\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)=\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}-\frac{1}{2}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{3}-\frac{1}{4}\gamma\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{4}+\ldots$$

$$\mathrm{L}\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)=-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}-\frac{1}{2}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{3}-\frac{1}{4}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{4}-\ldots$$

făcând diferenţa acestor două expresii, termenii de rang cu soţ dispar; cei ce rămân conţin factorul comun $\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ care iarăşi dispare cu $\sqrt{\frac{a}{a-b}}$.

29. Reunind acum toţi termenii care intră în expresia lui $V = \int_{-c\gamma}^{+c\gamma} X dx$ şi care sunt daţi prin formulele (34) şi (43), avem în fine:

$$
(44)\left\{
\begin{aligned}
&V = \pi c\gamma\left[a^2 - \frac{2}{3}a\,(a-b)\,\gamma^2 + \frac{1}{5}(a-b)^2\gamma^4\right] - 4\,ch\gamma\left[a - \right.\\
&\left.\frac{1}{3}(a-b)\,\gamma^2\right] + 2c\sqrt{\frac{a}{a-b}}\,a^2\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\,\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\times\\
&\times\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)(2n....(2n-3+q)}{1.2.3....(q-1)}\cdot\frac{1}{2^{2n-3+q}}\\
&\frac{1}{2n-q-1}\left(\frac{1}{\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}} - \frac{1}{\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}\right)\\
&\qquad + 2c\sqrt{\frac{a}{a-b}}\;a^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\times\\
&\times\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}\frac{(2n-1)(2n)..(4n-4)}{1.2.3...(2n-2)}\cdot\frac{1}{2^{4n-4}}\cdot\frac{1}{\log c}\,\log\frac{1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}{1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Aşa dar, volumul căutat se exprimă prin o serie cu două dimensiuni.

In această formulă, precum ştim, va trebui să înlocuim pe γ cu $\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}$ când nivelul nu trece de gardin, şi cu 1 când trece de gardin.

Se poate şi aci face observaţia foarte însemnată că c, jumătatea lungimii vasului, nu intră în expresia lui V decât ca factor comun la puterea întâia, ceeace este de un avantaj nespus în formarea tablelor.

30. Expresia (44) a lui V se poate pune şi sub altă formă, înlocuind pe

$$\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{-2n+q+1}\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{-2n+q+1},\quad L\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right),$$

$$L\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)$$

prin desvoltările lor în serii :

$$\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{-2n+q+1}=\sum_{r=0}^{r=-2n+q+1}(-1)^r\times$$

$$\times\frac{(-2n-q+1)(-2n+q)(-2n+q-1)..(-2n+q-r+2)}{1.....r}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^r,$$

$$\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{-2n+q+1}=\sum_{r=0}^{r=-2n+q+1}$$

$$\frac{-2n+q+1)(-2n+q)(-2n+q-1)..(-2n+q-r+2)}{1.2.3....r}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{n}}\right)^r.$$

$$L\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)=\sum_{r=0}^{r=\infty}(-1)^r\frac{1}{r+1}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{r+1}$$

$$L\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)=-\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{r+1}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{r+1}.$$

Făcând diferențele respective ale acestor serii, vom avea, punând $r=2s+1$:

$$\frac{1}{\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{+2n-q-1}}-\frac{1}{\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{+2n-q-1}}=$$

$$-2\sum_{s=0}^{s=-n+\frac{q}{2}}\frac{(-2n+q+1)(-2n+q)...(-2n+q+1-2\cdot)}{1.\,2.\,3....\,(2s+1)}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2s+1}$$

$$L\frac{1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}{1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}=+2\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{2s+1}\left(\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2s+1}$$

In aceste serii s trebuie să aibă toate valorile întregi și pozitive cuprinse între 0 și $-n+\frac{q}{2}$ pentru cea dintâi, între 0 și ∞ pentru cea de a doua.

Substituind în (44) vom avea :

$$
(45)\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{V}=\pi c\gamma\left[a^2-\frac{2}{3}a(a-b)\gamma^2+\frac{1}{5}(a-b)^2\gamma^4\right]-4\,ch\gamma\left[a-\frac{1}{3}(a-b)\gamma^2\right]-\\
&\qquad\qquad -2\,ca^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\times\\
&\frac{1}{(2n-1)\,(2+n1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)\,(2n)\ldots(2n-3+q)}{1.\,2.\,3...(q-1)}\times\\
&\qquad\qquad \frac{1}{2^{2n}-3+q}\cdot\frac{1}{2n-q-1}\times\\
&\times\sum_{s=0}^{s=-n+\frac{q}{2}}\frac{(-2n+q+1)\,(-2n+q)\ldots(-2n+q+1-2s)^{2s+1}}{1.\,2.\,3....(2s+1)}\times\\
&\left(\frac{a-b}{a}\right)^s+2ca^2\sum_{n+1}^{n=\infty}\frac{1.\,3.\,5\ldots(2n-1)}{2.\,4.\,6...\,(2n)}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}\\
&\frac{(2n-1)(2n)...(4n-4)}{1.\,2.\,3...(2n-2)}\,\frac{1}{2^{4n-5}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{2S+1}\,\gamma^{2s+1}\left(\frac{a-b}{a}\right)^s.
\end{aligned}
\right.
$$

31. **Verificări**. — Putem verifica deadreptul formulele generale (44) și (45) în două cazuri particulare.

Mai întâi dacă $h=0$, nivelul lichidului ajunge până la axul vasului, adică umple vasul pe jumătate; însă dacă în (44) și (45) facem $h=0$ și $\gamma=1$, toți termenii ce conțin pe h dispar și membrul al doilea se reduce numai la

$$\pi c\left[a^2-\frac{2}{3}(a-b)a+\frac{1}{5}(a-b)^2\right]=\frac{\pi c}{15}(8a^2+4ab+3b^2),$$

care este tocmai jumătate din expresia lui V dată de formula (9).

Să evaluăm acum volumul de lichid care umple în parte un vas cilindric; atunci $a=b$.

Fie 0 secțiunea dreaptă a vasului BC nivelul lichidului; avem $h=\mathrm{OD}$, $a=\mathrm{OB}$, $2c=\mathrm{O'O''}$.

Volumul lichidului cuprins în vas se poate calcula deadreptul, înmulţind aria segmentului BAC prin lungimea $2c$ a vasului. Insă avem :

segment BAC=sect.OBAC—tr.OBC,

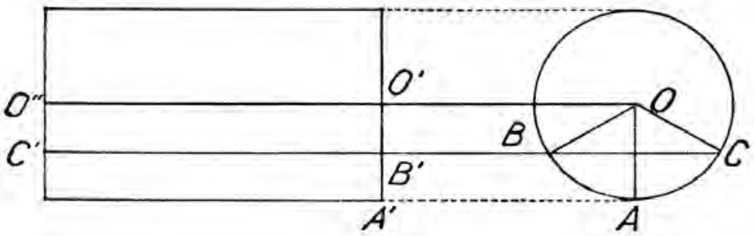

Fig. 13.

şi

$$\text{sect. OBAC} = \frac{a^2}{2} \times \text{arc BAC} = a^2 \text{arc BA} = a^2 \text{arc sin} \frac{\text{BD}}{\text{BO}} =$$

$$= a^2 \text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a} = a^2 \text{ arc sin} \sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$$

$$\text{tr. OBC} = 2 \text{ tr. BOD} = \text{OD} \times \text{BD} = h\sqrt{a^2-h^2} = ah\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}};$$

prin urmare

$$\text{segm BAC} = a^2 \text{ arc sin} \sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}} - ah\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}},$$

iar volumul V al lichidului va fi

$$V = 2a^2c \text{ arc sin} \sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}} - 2\,ach\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$$

Insă

$$\text{arc sin} \sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}} = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin} \frac{h}{a};$$

deci

$$V = \pi a^2 c - 2a^2 c \text{ arc sin} \frac{h}{a} - 2ach\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}.$$

Să desvoltăm pe arc sin $\frac{h}{a}$ şi pe $\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$ în serii după formulele

$$\text{arc sin}\,\frac{h}{a}=\frac{h}{a}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}.\,\frac{1}{5}\left(\frac{h}{a}\right)^5+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}+\ldots,$$

$$\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2-\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{h}{a}\right)^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{h}{a}\right)^6-\ldots-\frac{1.\,1.\,3\ldots(2n-3)}{2.\,4.\,6\ldots(2n)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n}-\ldots.$$

Substituind în valoarea lui V avem:

$$V=\pi a^2c-2a^2c\left[\frac{h}{a}+\frac{1}{2}.\,\frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5}\left(\frac{h}{a}\right)^5+\ldots+\frac{1.\,3\ldots(2n-1)}{2.\,4\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}+\ldots\right]$$

$$-2a^2c\left[\frac{h}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3-\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{h}{a}\right)^5-\ldots-\frac{1.1.3\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}-\ldots\right],$$

şi reducând termenii asemeni

$$V=\pi a^2c-4ach+4a^2c\left[\frac{1}{2}.\,\frac{1}{1.3}\left(\frac{h}{a}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{3.5}\left(\frac{h}{a}\right)^5+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}+\ldots\right]$$

sau prin o notaţie prescurtată,

$$(46)\quad V=\pi a^2c-4ach+4a^2c\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}.$$

Să găsim acum valoarea lui V plecând dela formula generală (45); va trebui să facem într'însa $a=b$, $\gamma=1$; atunci, în expresiile

$$\sum_{s=0}^{s=-n+\frac{q}{2}}\frac{(-2n+q+1)\,(-2n+q)\ldots(-2n+q+1-2s)}{1.2.3\ldots(2s+1)}\,\gamma^{2s+1}\left(\frac{a-b}{a}\right)^s,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{2s+1}\,\gamma^{2s+1}\left(\frac{a-b}{a}\right)^s,$$

va fi deajuns să considerăm numai termenii în care $s=0$, căci toți ceilalți sunt nuli, din cauza factorului nul $a-b$; acele expresii se reduc dar la

$$-(2n-q-1) \text{ şi } 1;$$

iar valoarea lui V la

$$V=\pi a^2c-4ach-2a^2c\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\;\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}$$

$$\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)(2n)...(2n-3+q)}{1.2.3...(q-1)}\;\frac{1}{2^{2n-s+q}}\;\frac{2}{2n-q-1}\cdot\frac{(-2n+q+1)}{1}\cdot$$

$$+\,2a^2c\sum_{=n1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\;\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}$$

$$\frac{(2n-1)\,(2n)...\,(4n-4)}{1.2.3...(2n-2)}\;\frac{1}{2^{4n-5}},$$

care se poate scrie mai scurt

$$(47)\quad V=\pi a^2c-4ach+4a^2c\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\;\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}$$

$$\sum_{q=1}^{q=2-1}\frac{(2n-1)(2n)...\,(2n-3+q)}{1.2.3....(q-1)}\cdot\;\frac{1}{2^{2n-3+q}}\cdot$$

Să demonstrăm că

$$(48)\quad \sum_{q=1}^{q=2n-1}\frac{(2n-1)\,(2n).....(2n-3+q)}{1.2.3.....(q-1)}\;\frac{1}{2^{2n-3+q}}=1.$$

Insemnând cu A primul membru al acestei ecuații, avem:

$$A=\frac{1}{2^{2n-2}}+\frac{2n-1}{1}\;\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{(2n-1)(2n)}{1.2}\;\frac{1}{2^{2n}}+$$

$$+\frac{(2n-1)(2n)\,(2n+1)}{1.2.3}\;\frac{1}{2^{2n+1}}+....+\frac{(2n-1)(2n)....(4n-4)}{(1.2.3...(2n-2)}$$

$$\frac{1}{2^{4n-4}}=\frac{1}{2^{4n-4}}\left[\frac{(2n-1)(2n)...(4n-4)}{1.2.3...(2n-2)}+\frac{(2n-1)(2n)...(4n-5)}{1.2.3...(2n-3)}+\right.$$

$$+\,2^2\,\frac{(2n-1)(2n)....(4n-6)}{1.2.3....(2n-4)}+....+2^{2n-4}\,\frac{(2n-1)(2n)}{1.2}$$

$$\left.+\,2^{2n-3}\,\frac{2n-1}{1}+2^{2n-2}\right].$$

$$= \frac{1}{2^{4n-1}}\Big[C_{4n-4}^{2n-2} + 2\,C_{4n-5}^{2n-3} + 2^2 C_{4n-6}^{2n-4} + 2^3 C_{4n-7}^{2n-5} + \ldots$$
$$+ 2^{2n-4} C_{2n}^{2} + 2^{2n-3} C_{2n-1}^{1} + 2^{2n-2}\, C_{2n-2}^{0}\Big]$$

în care C_m^n însemnează numărul de combinări ce se poate face cu m obiecte n câte n; facem încă convenția ca C_m^0 să însemneze 1.

Se știe că

$$\text{(a)} \qquad C_m^n = C_m^{m-n},\ C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

$$\text{(b)} \qquad C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots + C_m^m = 2^m$$

După formulele (a) vom putea scrie:

$$\begin{aligned}
C_{4n-4}^{2n-2} &= C_{4n-4}^{2n-2}\\
2C_{4n-4}^{2n-3} &= C_{4n-4}^{2n-3} + C_{4n-4}^{2n-1} = 2C_{4n-5}^{2n-3} + 2C_{4n-5}^{2n-4}\\
2C_{4n-4}^{2n-4} &= C_{4n-4}^{2n-4} + C_{4n-4}^{2n} = 2C_{4n-5}^{2n-4} + 2C_{4n-5}^{2n-5}\\
2C_{4n-4}^{2n-5} &= C_{4n-4}^{2n-5} + C_{4n-4}^{2n-1} = 2C_{4n-5}^{2n-5} + 2C_{4n-5}^{2n-6}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
2C_{4n-4}^{3} &= C_{4n-4}^{3} + C_{4n-4}^{4n-7} = 2C_{4n-5}^{3} + 2C_{4n-5}^{2}\\
2C_{4n-4}^{2} &= C_{4n-4}^{2} + C_{4n-4}^{4n-6} = 2C_{4n-5}^{2} + 2C_{4n-5}^{1}\\
2C_{4n-4}^{1} &= C_{4n-4}^{1} + C_{4n-4}^{4n-5} = 2C_{4n-5}^{1} + 2C_{4n-5}^{0}\\
2C_{4n-4}^{0} &= C_{4n-4}^{0} + C_{4n-4}^{4n-4} = 2C_{4n-5}^{0}
\end{aligned}$$

Adunând aceste ecuațiuni membru cu membru și reducând primul membru cu ajutorul ecuației (*b*), avem:

$$(c)\ 2^{4n-4} = C_{4n-4}^{2n-2} + 2C_{4n-5}^{2n-3} + 2^2\Big[C_{4n-5}^{2n-4} + C_{4n-5}^{2n-5} + C_{4n-5}^{2n-6} + \ldots$$
$$+ C_{4n-5}^{2} + C_{4n-5}^{1} + C_{4n-5}^{0}\Big].$$

Însă avem ecuațiile:

$$\begin{aligned}
C_{4n-5}^{2n-4} &= C_{4n-6}^{2n-4} + C_{4n-6}^{2n-5}\\
C_{4n-5}^{2n-5} &= C_{4n-6}^{2n-5} + C_{4n-6}^{2n-6}\\
C_{4n-5}^{2n-6} &= C_{4n-6}^{2n-6} + C_{4n-6}^{2n-7}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_{4n-5}^{2} &= C_{4n-6}^{2} + C_{4n-6}^{\prime}\\
C_{4n-5}^{\prime} &= C_{4n-6}^{\prime} + C_{4n-6}^{0}\\
C_{4n-5}^{0} &= n_{4n-6}^{0}
\end{aligned}$$

și adunând,

$$C_{4n-5}^{2n-4} + C_{4n-5}^{2n-5} + C_{4n-5}^{2n-6} + \ldots + C_{4n-5}^{2} + C_{4n-5}^{1} + C_{4n-5}^{0} = C_{4n-6}^{2n-4} + 2\left(C_{4n-6}^{2n-5} + C_{4n-6}^{2n-6} + \ldots + C_{4n-6}^{2} + C_{4n-6}^{1} + C_{4n-6}^{0}\right);$$

substituind în (c), dobândim:

$$(d)\quad 2^{4n-4} = C_{4n-4}^{2n-2} + 2C_{4n-5}^{2n-3} + 2^2C_{4n-6}^{2n-4} + 2^3\left(C_{4n-6}^{2n-5} + C_{4n-6}^{2n-6} + \ldots + C_{4n-6}^{2} + C_{4n-6}^{1} + C_{4n-6}^{0}\right)$$

Tot asemenea vom avea:

$$\begin{aligned}
C_{4n-6}^{2n-5} &= C_{4n-7}^{2n-5} + C_{4n-7}^{2n-6}\\
C_{4n-6}^{2n-6} &= C_{4n-7}^{2n-6} + C_{4n-7}^{2n-7}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
C_{4n-6}^{2} &= C_{4n-7}^{2} + C_{4n-7}^{1}\\
C_{4n-6}^{1} &= C_{4n-7}^{1} + C_{4n-4}^{0}\\
C_{4n-6}^{0} &= C_{4n-7}^{0},
\end{aligned}$$

din care

$$C_{4n-6}^{2n-5} + C_{4n-6}^{2n-6} + \ldots + C_{4n-6}^{2} + C_{4n-6}^{1} + C_{4n-6}^{0} = C_{4n-7}^{2n-5} + 2\left[C_{4n-7}^{2n-6} + C_{4n-7}^{2n-7} + \ldots + C_{4n-7}^{2} + C_{4n-7}^{1} + C_{4n-7}^{0}\right],$$

și substituind în (d),

$$2^{4n-4} = C_{4n-4}^{2n-2} + 2C_{4n-5}^{2n-3} + 2^2C_{4n-6}^{2n-4} + 2^3C_{4n-7}^{2n-5} + 2^4\left(C_{4n-7}^{2n-6} + C_{4n-7}^{2n-7} + \ldots + C_{4n-7}^{2} + C_{4n-7}^{1} + C_{4n-7}^{0}\right],$$

Continuând astfel, vom ajunge în fine la formula

$$2^{4n-4} = C_{4n-4}^{2n-2} + 2C_{4n-5}^{2n-3} + 2^2C_{4n-6}^{2n-4} + 2^3C_{4n-7}^{2n-5} + \ldots + 2^{2n-4}C_{2n}^{2} + 2^{2n-3}C_{2n-1}^{1} + 2^{2n-2}C_{2n-2}^{0},$$

în virtutea căreia valoarea lui A se reduce la 1; Formula (48) este dar demonstrată.

Combinând această ecuație cu (47), dedusă din formula generală (45) dăm tocmai peste formula (46), găsită deadreptul.

33. **Calculul limitelor inferioare și superioare a restului seriei** (44).

Se poate găsi expresiunea limitei superioare a sumei unui număr oarecare de termeni oarecare ai seriei

$$+2ca^2\sqrt{\frac{a}{a-b}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}$$
$$\sum_{q=1}^{q=2n-2}\frac{(2n-1)(2n)\ldots.(2n-3+q)}{1.2.3\ldots(q-1)}\cdot\frac{1}{2^{2n-3+q}}\cdot\frac{1}{2n-q-1}$$
$$\times\left[\frac{1}{\left(1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}-\frac{1}{\left(1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}\right)^{2n-1-q}}\right]$$
$$+2ca^2\sqrt{\frac{a}{a-b}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\frac{1}{(2n-1)((2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}$$
$$\frac{(2n-1)(2n)\ldots.(4n-4)}{1.2.3\ldots.(2n-2)}\frac{1}{4n-4}-\frac{1}{\log e}\log\frac{1+\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}}{1-\gamma\sqrt{\frac{a-b}{a}}},$$

care figurează în valoarea (44) a lui V. Acești termeni, după formula (32) provin din integrarea între limitele $x=-c\gamma$ și $x=+c\gamma$ a diferenței următoare:

$$-\mathrm{S}=-h^2\left[\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{\xi^{2n-1}}{2n+1}-\sum_{n-1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{\xi^{2n-1}}{2n-1}\right]$$

în care

$$\xi=\frac{2\,ph}{2\,pa-x^2}$$

Insă toate valorile lui x fiind cuprinse între $-c\gamma$ și $+c\gamma$, este evident că avem:

$$\frac{2\,ph}{2\,pa-c^2\gamma^2}>\frac{2\,ph}{2\,pa-x^2},$$

sau

$$\frac{(2\,ph)^{2n-1}}{(2\,pa-c^2\gamma^2)^{2n-1}}>\frac{(2\,ph)^{2n-1}}{(2\,pa-x^2)^{2n-1}}$$

înlocuind pe $2p$ cu $\frac{c^2}{a-b}$ şi reducând factorii comuni,

$$\frac{h^{2n-1}}{[a-\gamma^2(a-b)]^{2n-1}} > \frac{(2ph)^{2n-1}}{(2pa-x^2)^{2n-1}}$$

Când nivelul nu trece de gardin, $\gamma = \sqrt{\frac{a-h}{a-b}}$; atunci

$$\frac{(2ph)^{2n-1}}{(2qa-x^2)^{2n-1}} < \frac{h^{2n-1}}{[a-(a-h)]^{2n-1}},$$

sau

$$\frac{(2ph)^{2n-1}}{(2pa-x^2)^{2n-1}} < 1,$$

şi prin urmare

$$\int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} \frac{(2ph)^{2n-1}dx}{(2pa-x^2)^{2n-1}} < 2c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}.$$

Dacă nivelul trece de gardin, $\gamma=1$, şi atunci

$$\frac{(2ph)^{2n-1}}{(2pa-x^2)^{2n-1}} < \left(\frac{h}{b}\right)^{2n-1}$$

de unde

$$\int_{-c}^{+c} \frac{(2ph)^{2n-1}dx}{(2pa-x^2)^{2n-1}} < 2c\left(\frac{h}{b}\right)^{2n-1}$$

Fie

$$S_1 = +h^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\frac{\xi^{2n-1}}{2n+1},\ S_2 = -h^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\frac{\xi^{2n-1}}{2n-1}$$

Vom avea: pentru $\gamma = \sqrt{\frac{a-h}{a-b}},$

$$\int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} S_1\,dx < +2ch^2\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n+1},$$

$$\int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} S_2\,dx < +2ch^2\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n-1};$$

pentru $\gamma=1$

$$\int_{-c}^{+c} S_1\,dx < +2\,ch^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{b}\right)^{2n-1},$$

$$\int_{-c}^{+c} S_2\,dx < +2\,ch^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\,\frac{1}{2n-1}\left(\frac{h}{b}\right)^{2n-1}$$

Insă avem : $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}=\text{arc sin}\,(1)-1=$

$$\frac{\pi}{2}-1=0{,}570796\ldots,\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{b}\right)^{2n-1}=$$

$$\frac{b^2}{h^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{b}\right)^{2n+1}=\frac{b^2}{h^2}\left[\text{arc sin}\left(\frac{h}{b}\right)-\frac{h}{b}\right],$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n-1}=\sum_{n=1}^{n=8}\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)}=1,$$

$$(50)\ \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots..(2n)}\,\frac{1}{2n-1}\left(\frac{h}{b}\right)^{2n-1}=\sum_{n=1}^{n-\infty}\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots.(2n)}\left(\frac{h}{b}\right)^{2n-1}$$

$$=\frac{b}{h}\sum_{n=1}^{n-\infty}\frac{1.1.3..(2n-3)}{2.4.6\ldots(2\,n)}\left(\frac{h}{b}\right)^{2n}=\frac{b}{h}\left[\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}-1\right];$$

prin urmare, pentru $\gamma=\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}$,

$$\int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} S_1 dx < \left(\frac{\pi}{2}-1\right) 2\,ch^2 \sqrt{\frac{a-h}{a-b}} \qquad \int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} S_2 dx < 2\,ch^2 \sqrt{\frac{a-h}{a-b}};$$

și pentru $\gamma=1$,

$$\int_{-c}^{+c} S_1\,dx < 2\,cb^2\left[\arc\sin\left(\frac{h}{b}\right)-\frac{h}{b}\right], \quad \int_{-c}^{+c} S_2 dx < 2\,cbh\left[\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}-1\right].$$

Să zicem că în seriile S_1 și S_2 nu am lua decât un număr finit ν, de termeni, și să însemnăm cu $S_1^{(\nu)}$ și $S_2^{(\nu)}$ sumele acestor ν termeni; atunci

$$\int S_1 dx = \int S_1 dx + R_2, \quad \int S_2 dx = \int S_2^{(\nu)} dx + R_2,$$

R_1 și R_2 fiind eroarea provenită din termenii negleși. Vom avea, pentru $\gamma=\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}$,

$$R_1 < \left(\frac{\pi}{2}-1\right).\, 2\,ch^2\sqrt{\frac{a-h}{a-b}} - \int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} S_1^{(\nu)} dx,$$

$$R_2 < 2\,ch^2 \sqrt{\frac{a-h}{a-b}} - \int_{-c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}}^{+c\sqrt{\frac{a-h}{a-b}}} S_2^{(\nu)}\, dx;$$

şi pentru $\gamma=1$

$$(52)\quad R_1 < 2\,cb^2\left[\arc\sin\left(\frac{h}{b}\right)-\frac{h}{b}\right]-\int_{-c}^{+c} S_1^{(\nu)}\,dx,$$

$$R_2 < 2\,cbh\left[\sqrt{-1\,\frac{h^2}{b^2}\,1-}\right]-\int_{-c}^{+c} S_2^{(\nu)}\,dx.$$

Aceste formule permit a calcula limita superioară a erorii comise când în evaluarea volumului V nu am lua decât un număr ν de termeni din fiecare din seriile S_1 şi S_2.

33. Prin un calcul analog putem găsi şi o limită inferioară a acestei erori.

Avem :

$$\frac{2ph}{2pa-x^2} > \frac{2ph}{2pa},$$

de unde

$$\frac{(2ph)^{2n-1}}{(2pa-x^2)^{2n-1}} > \left(\frac{h}{a}\right)^{2n-1}$$

şi

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma} \frac{(2ph)^{2n-1}dx}{(2pa-x^2)^{2n-1}} > 2c\gamma\left(\frac{h}{a}\right)^{2n-1}$$

Aşa dar

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma} S_1\,dx > 2ch^2\gamma\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1},$$

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma} S_2\,dx > 2ch^2\gamma\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\,\frac{1}{2n-1}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n-1},$$

sau în virtutea formulelor (50)

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma} S_1\,dx > 2ca^2\gamma\left[\arc\sin\left(\frac{h}{a}\right)-\frac{h}{a}\right],$$

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma} S_2\,dx > 2cah\gamma\left[\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}-1\right],$$

din care scoatem ca și mai sus,

$$(53)\quad R_1 > 2ca^2\gamma\left[\text{arc sin}\left(\frac{h}{a}\right)-\frac{h}{a}\right]-$$

$$-\int_{-c\gamma}^{+c\gamma} S_1^{(\nu)}dx,\ R_2 > 2cah\gamma\left[\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}-1\right]-\int_{-c\gamma}^{+c\gamma} S_2^{(\nu)}\,dx.$$

34. Din toate acestea rezultă că problema determinării golurilor vaselor este rezolvată, în ipoteza că doaga este parabolică. Când dimensiunile a, b, c, h ale volumului vor fi măsurate, formula (44) sau (45) ne va da pe V, și formulele (52) și (53) ne vor face cunoscută limita erorii comise în evaluarea seriilor ce intră în valoarea lui V.

Formulele (44) sau 45), deși destul de complicate, s'ar putea reduce în table care, fără să fie prea voluminoase ar da volumul căutat cu o aproximațiune îndestulătoare pentru trebuințele practice.

Altă expresie a volumului golului găsită prin desvoltarea lui $\frac{(2pa)^{2n-1}}{(2pa-x^2)^{2n-1}}$ în expresia (33) a lui X:

$$V=\pi c\gamma\left[a^2-\frac{2}{3}a(a-b)\gamma^2+\frac{1}{5}(a-b)^2\gamma^4\right]-$$

$$-4ch\gamma\left[a-\frac{1}{3}(a-b)\gamma^2\right]$$

$$+4ca^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}$$

$$\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{(2n-1)(2n)....(2n+q-2)}{1.\,2.\,3......q}\ \frac{\gamma^{2q+1}}{2q+1}\ \left(\frac{a-b}{a}\right)^q$$

DESPRE MĂSURA CAPACITĂȚII BUȚIILOR.

Memoriu suplimentar.

35. Se poate găsi și o a treia formă pentru expresia volumului de lichid care umple în parte un vas.

Am găsit (23, 24)

$$V = \int_{-c\gamma}^{+c\gamma} X dx,$$

$$X = \frac{\pi h^2}{2} \frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2h^2} - 2h^2 \frac{2pa - x^2}{2ph}$$
$$+ 2h^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \frac{(2ph)^{2n-1}}{(2pa-x^2)^{2n-1}}$$

Insă

$$\frac{(2ph)^{2n-1}}{(2pa-x^2)^{2n-1}} = \frac{(2ph)^{2n-1}}{(2pa)^{2n-1}\left[1 - \frac{x^2}{2pa}\right]^{2n-1}} = \left(\frac{h}{a}\right)^{2n-1} \left[1 - \frac{x^2}{2pa}\right]^{-(2n-1)}$$

prin urmare

$$X = \frac{\pi h^2}{2} \frac{(2pa - x^2)^2}{4p^2h^2} - 2h^2 \frac{2pa - x^2}{2ph}$$
$$+ 2h^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6....(2n)} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{h}{a}\right)^{2n-1} \left[1 - \frac{x^2}{2pa}\right]^{(2n-1)}.$$

Deoarece $x^2 < 2pa$ pentru toată întinderea vasului, putem desvolta în serie pe $\left[1 - \frac{x^2}{2pa}\right]^{-(2n-1)}$ după formula binomului, ceea ce dă:

$$\left[1 - \frac{x^2}{2pa}\right]^{-(2n-1)} = 1 + \frac{2n-1}{1} \frac{x^2}{2pa} + \frac{(2n-1)(2n)}{1.2} \frac{x^4}{(2pa)^2}$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1.2.3.} \frac{x^6}{(2pa)^3} + ...$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n)...(2n+q-2)}{1.2.3...q} \frac{x^{2q}}{(2pa)^q} + ...$$

sau

$$\left[1 - \frac{x^2}{2pa}\right]^{-(2n-1)} = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(2n-1)(2n)...(2n+q-2)}{1.2.3...\, q} \frac{x^{2q}}{(2pa)^q}$$

Inmulțind această ecuație cu dx și integrând între limitele $-c\gamma$ și $+c\gamma$, avem:

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\left[1-\frac{x^2}{2pa}\right]^{-(2n-1)}dx=2\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{(2n-1)(2n)\ldots-(2n+q-2)}{1.2.3\ldots q}\,\frac{(c\gamma)^{2q+1}}{(2q+1)(2pa)^q}$$

Insă $2pa=\dfrac{c^2a}{a-b}$; prin urmare $\dfrac{(c\gamma)^{2q+1}}{(2pa)^q}=\dfrac{(c\gamma)^{2q+1}}{\left(\frac{c^2a}{a-b}\right)^q}=c\gamma^{2q+1}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^q.$

Substituind și punând factorul comun c afară din semnul Σ, avem:

$$\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\left(1-\frac{x^2}{2pa}\right)^{(2n-1)}dx=2c\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{(2n-1)(2n)\ldots.(2n+q-2)}{1.2.3\ldots.q}\,\frac{\gamma^{2q+1}}{2q+1}\left(\frac{a-b}{a}\right)^q.$$

De altă parte am găsit (26) valorile integralelor

$$\frac{\pi h^2}{2}\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}\frac{(2pa-x^2)^2}{4p^2h^2}\,dx \text{ și } -2h^2\int_{-c\gamma}^{+\gamma}\frac{2pa-x^2}{2ph}\,dx;$$

așa dar

$$(54)\quad V=\int_{-c\gamma}^{+c\gamma}Xdx=\pi c\gamma\left[a^2-\frac{2}{3}\,a\,(a-b)\gamma^2+\frac{1}{5}(a-b)^2\gamma^4\right]-$$

$$-4ch\gamma\left[a-\frac{1}{3}(a-b)\gamma^2\right]+4ca^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\times$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{2n-1)(2n\ldots(2n+q-2)}{1.2.3\ldots q}\,\frac{\gamma^{2q+1}}{2q+1}\left(\frac{a-b}{a}\right)^b.$$

Se va putea întrebuința pentru calculul lui V, oricare din formulele (44), (45) sau (54); se va prefera aceea care după împrejurări va prezenta cele mai mari facilități pentru calcul.

Limitele (51), (52) și (53) ale resturilor sunt aplicabile și formulei (54).

Dacă $a=b$, $\gamma=1$, formula (54) se reduce la

$$V=\pi a^2c-4ach+4a^2c\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{h}{a}\right)^{2n+1}$$

care este chiar expresia (46), găsită deadreptul.

36. Pentru a reduce în table formula (44), sau (45) sau (54), înlocuim pe a, b, c, h cu valorile lor în funcție de dimensiunile măsurate ale lichidului. Dacă v este diametrul vranei, f al fundului, l lungimea vasului și i înălțimea lichidului în vas, avem :

$$a=\frac{v}{2},\ b=\frac{f}{2},\ c=\frac{l}{2},\ h=\frac{v}{2}-i.$$

Substituind aceste valori în ecuațiile (44), (45 și (54)) și punând pe v factor comun, acele ecuații vor lua forma :

$$V=\pi l\,v^2\varphi\left(\frac{f}{v},\ \frac{i}{v}\right),$$

în care φ este un factor cunoscut ce se exprimă prin o serie cu două sau trei dimensiuni ; de aci

$$\log.V=\log(\pi l)+\log(v^2)+\log\varphi\left(\frac{f}{v},\ \frac{i}{v}\right)$$

Tablele roșii dau log (πl). O tablă, însemnată pe margine cu o dungă neagră și una roșie, dă $\log(v^2)$; în o coloană verticală se caută numărul de centimetri cuprins în v, și alături se găsesc $\log(v^2)$.

Cât pentru $\log\varphi\left(\frac{f}{v},\frac{i}{v}\right)$, el e dat *prin o tablă însemnată cu o dungă galbenă. Această tablă e cu două intrări* : în primul rând orizontal de sus se caută raportul $\frac{i}{v}$, dacă e mai mic de 0, 500 ; iar dacă e mai mare decât 0,500, în primul rând orizontal de jos ; raportul $\frac{f}{v}$ se caută în prima coloană verticală dela stânga ; la încrucișarea coloanei verticale ce trece prin $\frac{i}{v}$ cu rândul orizontal ce trece prin $\frac{f}{v}$ se găsește $\log\varphi\left(\frac{f}{v},\frac{i}{v}\right)$.

Adunând acest logaritm cu log (πl) și cu log (a^2), găsite în tablele precedente, se află log V, și tablele negre vor da atunci chiar pe V, dacă raportul $\frac{i}{v}$ l-am găsit în primul rând *de sus* al tablei galbene; dacă însă acest raport l-am găsit în primul rând *de jos* al acestei table, va trebui ca valoarea găsită pentru V să o scădem din volumul total al vasului, aflat în modul știut (19). In adevăr, dacă $\frac{i}{v}$ e mai mare de 0,500, nivelul D al lichidului trece de jumătatea vasului. Insă, după dispoziția adoptată, tablele galbene dau logaritmul lui $\varphi\left(\frac{f}{v}, \frac{i}{v}\right)$ pentru înălțime BC=AD, și pentru a găsi volumul corespunzător la înălțimea BD, va trebui să scădem volumul aflat din volumul total ala vasului.

Calculul tablelor galbene fiind foarte anevoie de făcut, era necesar a le reduce pe cât se poate întinderea lor; de aceea nu sunt calculate decât pentru valorile raporturilor $\frac{i}{v}$ și $\frac{f}{v}$ din 0,005 în 0,005, ceea ce permite a calcula volumul golului cu o aproximație de $\frac{1}{200}$, îndestulătoare pentru trebuințele practicei. Apoi raportul este introdus numai între limitele 0,650, și 1,000, căci e prea rar ca vasele să aibă o curbură mai mare de 0,650. Cu modul acesta, tablele galbene nu vor cuprinde decât 14 pagini imprimate în 8^0.

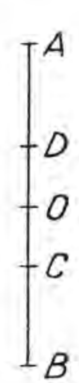

Fig. 14.

S'ar putea face astfel ca *să se poată calcula volumul golului* deadreptul și când $\frac{i}{v}$ e mai mare de 0,500, fără a mai scădea din volumul total al vasului: atunci tablele galbene ar avea o întindere îndoită. Cred că această dispoziție ar fi preferabilă, căci ar scurta operațiunile pentru cei ce au a se servi de table, fără a îngreuia considerabil construcția lor.

Cât pentru calculul valorii raporturilor $\frac{i}{v}$ și $\frac{f}{v}$, s'ar putea proceda în două moduri: primul ar fi să se adauge câte trei nule la numărul de centimetri cuprins în i și f, să se împartă cu numărul de centimetri al lui v și să se caute în tablele galbene aceste câturi: Acest calcul nu ar fi prea greu de executat, căci ar da loc numai la niște împărțiri de întregi. Al doilea mijloc ar fi de a căuta în tablele roșii pe i, f, v; de a lua numerile ce se află alături, și de a scădea numărul corespunzător la v din cele corespunzătoare la i și f; cu modul acesta aflăm logaritmii rapor-turilor $\frac{i}{v}$ și $\frac{f}{v}$. In adevăr tablele roșii dau logaritmii produselor πi, πf, πv, și avem:

$$\log \pi i - \log \pi v = \log \frac{\pi i}{\pi v} = \log \frac{i}{v}$$

$$\log \pi f - \log \pi v = \log \frac{\pi f}{\pi v} = \log \frac{f}{v}$$

In cazul acesta, în primele rânduri orizontale și în prima coloană verticală a tablelor galbene ar trebui să se insereze nu chiar raporturile $\frac{i}{v}$ și $\frac{f}{v}$ ci logaritmii lor. Acest de al doilea mod ar avea asupra celui precedent avantajul că ar înlocui două împărțiri prin două scăderi; însă reclamă o căutare mai mult în table.

In ceeace privește dispoziția tablelor de goluri, vom examina chestiunea mai de aproape, pentru a le face cât mai practice se va putea.

37. Aci e locul a face o observație foarte importantă în privința aproximației ce trebuie realizată în construcția tablelor.

Fie

$$V = F(a, b, c, h),$$

expresia volumului de lichid în funcție de dimensiunile a, b, c, h, F este o funcție omogenă și de gradul al treilea în a, b, c, h.

Să presupunem că în măsurarea lungimilor a, b, c, h se comit erorile δa, δb, δc, δh: diferența ce va proveni din aceasta în valoarea lui V va fi

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial a} \delta a + \frac{\partial V}{\partial b} \delta b + \frac{\partial V}{\partial c} \delta c + \frac{\partial V}{\partial h} \delta h.$$

Fie δq cea mai mare valoare a erorilor δa, δb, δc, δh; atunci valoarea maximă a lui δV este

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial c}+\frac{\partial V}{\partial c}+\frac{\partial V}{\partial h}\right)\delta q.$$

Insă formulele (1), (2), (9), (10) sunt toate de forma

$$V=cf(a,\ b),$$

de unde
$$\frac{\partial V}{\partial c}=\frac{V}{c}$$

prinurmare valoarea maximă a lui δV se poate pune sub forma

$$\frac{V}{c}\delta q+\left(\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\right)\delta q.$$

Derivatele parţiale $\frac{\partial V}{\partial a}$ şi $\frac{\partial V}{\partial b}$ scoase din formulele (1), (2), (9), (10) sunt pozitive; aşa dar δV poate să fie mai mare decât $\frac{V}{c}$ δa, adică

$$\delta V \gtreqless \frac{V}{c}\delta q$$

Aşa dar chiar supozând că formula întrebuinţată pentru calculul lui V este riguros exactă, eroarea relativă introdusă în valoarea lui V din cauza erorilor de măsurat este proporţională cu aceste erori cu volumul total şi invers proporţională cu lungimea vasului; şi aceasta este adevărat oricare ar fi formula întrebuinţată pentru calculul lui V.

Dacă dimensiunile sunt măsurate cu aproximaţia $0^m,005$, precum am făcut în tablele ce construesc, şi dacă lungimea vasului este de $1^m,0$ avem.

$$\delta V \gtreqless 0{,}01\ V,$$

adică eroarea relativă poate să treacă peste 1 din volumul total. Cu aproximaţia de $0^m,01$ în măsura dimensiunilor, am fi găsit pentru acelaş vas:

$$\delta V \gtreqless 0{,}02\ V.$$

De aci se vede cât de important este a se măsura dimensiunile cu o mai mare exactitate. Aceasta m'a și făcut a calcula tablele din $0^m,005$ în $0^m,005$, care este cea mai mare aproximație pe care practica poate să o dea în măsuri de natura acestora.

Tot de aci vine că în calculul tablelor albe și galbene m'am mulțumit cu aproximația 0,001 și 0,005 din volumul total; căci erorile provenite din cantitățile neglese sunt mult mai mici decât cele ce pot proveni din neexactitatea măsurătorilor.

Eroarea absolută e dată prin formula

$$\delta V < \frac{V}{c}\,\delta q + \left(\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\right)\delta q.$$

Substituind în locul lui $\frac{\partial V}{\partial a}$ și $\frac{\partial V}{\partial b}$ valorile lor trase din formulele (1), (2), (9), (10), vom vedea că membrul al doilea crește împreună cu a, b, c; așa dar eroarea absolută crește împreună cu dimensiunile vasului, pe când eroarea relativă am văzut că descrește când c crește.

3.

Cercetări asupra părții financiare a proiectului de răscumpărare a căilor ferate

1880

NOTIȚĂ ISTORICĂ

Lucrarea ce urmează fiind în legătură cu răscumpărarea căilor ferate, socotim că e necesar să arătăm, în trăsături principale, cum s'a desfășurat chestiunea construirii căilor ferate în România dela început până la momentul când apare scrierea lui Sp. Haret.

Cea dintâi linie s'a făcut în țara noastră de o asociație streină, începând lucrarea în timpul domniei lui Cuza și terminând-o în 1869. Este linia București-Giurgiu.

Nevoile economice ale țării cereau imperios crearea și a altor linii de comunicație. Propuneri veneau destule din partea multor asociațiuni streine. Condițiunile lor erau, în genere, destul de grele față de slabele mijloace ale Statului din vremea aceea; influențe politice externe se încrucișau cu luptele politice interne. In cele din urmă, în anul 1868, după ce parlamentul și guvernul, în diferitele lor formațiuni, au examinat propunerile, s'a ajuns la votarea unei legi și aunei convențiuni, promulgate cu decretul domnesc Nr. 1516 din 21 Septembrie 1868.

Dăm legea din 21 Sept. 1868:

„*Se declară de utilitate publică construirea unei rețele de căi ferate coprinzând următoarele secții*: I. *Suceava—Roman cu un rom la Botoșani și altul la Iași*; II. *Roman—Galați cu un ram Tecuci—Bârlad*; III. *Galați—Brăila—Buzău—Ploești—București*; IV. *București—Pitești—Slatina—Craiova—Turnu-Severin Vârciorova. Construirea și exploatarea secției I se concede d-lui Cavaler de Offenheim; construirea secțiilor II, III și IV ducelui de Ujest principe de Hohenlohe, ducelui de Ratibor, comitelui de Lehndorff și d-rului B. H. Strussberg*". („Monitorul Oficial" Nr. 214—din 1868).

Iată principalele dispozițiuni ale Convențiunii:

„*Intre guvernul M. S. Domnitorului României și între concesionari*:

Ducele de Ujest, ducele de Ratibor, Contele Lehndorf și dr. Strussberg s'a încheiat convențiunea următoare.:

„§ 1. *Guvernul român acordă întreprinzătorilor indicați concesiunea pentru a construi și exploata căile ferate următoare*: *Roman—Tecuci—Galați*; *Tecuci—Bârlad*; *Galați—Brăila—Buzău—Ploești—București*; *București—Pitești—Slatina Craiova—Turnu-Severin—Vârciorova.*

„§ 3. *Concesionarii își rezervă dreptul de a alege liniile pe cari vor voi să înceapă lucrările de construcțiune. Ei se îndatorează a procede la fixarea traseului și la elaborarea planurilor în termen de șase săptămâni și a prezenta guvernului român cel mult în patru luni proiectele preliminarii.*

„*Guvernul se obligă a aproba sau respinge zisele proiecte... La caz de respingere și în lipsă de coînțelegere către ambele părți hotărîrea unui tribunal arbitral* *va decide dacă și în ce mod proiectele respinse vor trebui a se modifica... Dacă arbitrii nu se vor înțelege, președintele Curții de Casațiune va numi pe supra-arbitru.*

„§ 6. *Concesionarii sunt obligați a începe construcțiunea până în șase săptămâni după primirea planurilor aprobate și după obținerea permisiunii de a începe lucrările. Liniile Roman—Tecuci—Galați să fie gata terminate și date în circulație în trei ani; Galați—Brăila—Buzău—Ploești—București în doi ani și jumătate; București—Pitești—Vârcioova în trei ani.*

„§ 7. *Capitalul necesar pentru construirea căilor ferate arătate în § 1 este fixat la suma de 270.000 franci capital nominal în obligațiuni de căi ferate pentru un kilometru de cale ferată.*

„§ 8. *Concesionarii vor forma o companie care va avea scopul și dreptul de a-și procura fondurile necesare la construcțiunea tuturor căilor ferate prin obligațiuni confecționate și emise în numele lor propriu pe comptul și pericolul lor. Aceste obligațiuni vor fi asigurate în întregul fond al drumurilor de fer și în dobânzile garantate de Stat.*

„*Obligațiunile vor aduce 7 ½ % interese anuale.*

„*Obligațiunile vor glăsui la purtător și vor fi de câte 375 fr., adică de câte 15 livre sterling sau 100 taleri de Prusia fiecare.*

„§ 9. *Concesionarii sunt autorizați a confecționa obligațiuni pentru fondurile necesare la construirea a 300 kilom., imediat după promulgarea acestei concesiuni.*

„*Confecționarea și emisiunea obligațiunilor vor fi supuse supravegherii și controlului unui comisar al Statului, a cărui numire este rezervată guvernului român. El va avea reședința sa în Berlin.*

„*Pentru cheltuielile preliminarii, comisarul Statului va libera concesionarilor obligațiuni pentru o sumă de 2.000.000 franci pentru care ei vor depune polițe acceptate de o sumă egală.*

„*Afară de aceasta, mai este permis concesionarilor a vinde obligațiuni asupra drumurilor de fer în valoarea ce vor găsi de cuviință prin case și instituțiuni de bancă.*

„§ 10. *Toate obligațiunile drumului de fer vor fi păstrate într'o ladă de fer sigură, dela care și comisarul Statului va avea o cheie. Lada se va păstra într'un institut de bancă primit de ambele părți.*

„§ 12. *După terminarea construirii fiecărei linii, guvernul va examina și va admite lucrările săvârșite și materialul de exploatațiune. Dacă guvernul s'ar opune a le primi... întâmpinările făcute de guvern se vor supune unei comisii de arbitraj conf.* § 3.

„§ 13. *Indată ce guvernul va consimți la darea în circulațiune a întâiei secțiuni, concesionarii sunt obligați a înființa o direcțiune administrativă în București.*

„*Numirea capului administrativ și a inginerului șef va fi supusă la aprobațiunea guvernului român.*

„§ 14. *Concesionarii sunt autorizați a constitui pe posesorii de obligațiuni într'o societate de acționari... Această societate va fi autorizată a-și numi un consiliu de administrațiune... In statute se vor determina regulele după cari participanțiunea guvernului în administrațiune, prin numirea de comisari sau membri în consiliul de administrațiune, va avea loc.*

„§ 15. *Durata concesiunii este fixată la 90 de ani socotită din ziua deschiderei liniei dela Roman la Galați. După trecerea termenului, tot stabilimentul drumului de fer cu toate dependințele sale trece în deplină proprietate a guvernului român* *și liber de orice pretențiune ar putea avea a treia persoană asupra averii drumului de fer... Amortismentul obligațiunilor acestor căi ferate va începe îndată cu deschiderea liniilor parțiale astfel încât să fie săvârșit la expirarea concesiunei.*

„§ 17. *...La caz când venitul neto și după acoperirea dobânzilor ar lăsa un excedent, acesta va fi întrebuințat pentru a înapoia sumele plătite de guvern în anii trecuți pe baza garanției date de dânsul.*

„§ 20. *Spre a veni în ajutorul întreprinderei guvernul român se obligă:*

„a) *a ceda fără despăgubire terenul necesar pentru construcțiunea căilor ferate;*

„b) *a scuti pe concesionari de taxele de import pentru toate materialele;*

„c) *a-i scuti de toate taxele de justiție și de timbru pentru toate contractele;*

„d) *a nu înființa nici Statul nici comunele, județele vreo taxă asupra exploatațiunii căilor ferate.*

„§ 22. *Fixarea tarifelor pentru persoane și mărfuri este rezervată numai guvernului român.*

„§ 23. *Concesionarii nu pot fi niciodată dispensați de îndatoririle contractate pentru construcțiunea căilor ferate. Ei vor putea însă suspenda temporal lucrarea în caz de forță majoră. Tribunalul arbitral va judeca faptele cari constituesc aceste cazuri.*

„§ 24. *Concesionarii se angajează a depune la tezaurul public o cauțiune în bani sau efecte publice de un milion de franci.*

„§ 25. *Guvernul își rezervă dreptul a cere, după trecere de 30 de ani, cesiunea tuturor drepturilor ce rezultă pentru concesionari luând asupră-și obligațiile în suma hotărâtă...*" („Monitorul Oficial". Nr. 216 din1868)

Concesionarii nu și-au îndeplinit îndatoririle lor, în schimb cereau ca Statul nostru să le respecte pe ale sale. De aci discuțiunile între guvernul român și concesionari deveneau din zi în zi foarte acute și intervenția guvernului prusian în favoarea lor se făcea pe față. Intr'o cerere a sa, Strusberg a intercalat amenințarea că, dacă nu va fi satisfăcut, va ști să realizeze pretențiunile sale prin ajutorul guvernului țării sale. De aceea opinia publică la noi devenise cu totul ostilă acestor concesionari. Ca un ecou al acestei porniri amintim o vestită cantonetă a lui I. Ianov,[26] publicată în „Convorbiri literare"[27] (în 1871) și cântată de „cupletiștii" din acea vreme:

Ich bin von Kalikenberg,
Tocmai din Berlin alerg
Mit hohe Protekzion
Für grosse konzession...[28]

Nemulțumirea era mare, între altele, din pricină că se numise comisar al guvernului român pentru supravegherea activității concesionarilor, un german Ambronn, care lăsase a se risipi o parte din garanția Statului nostru, de care se vorbește în § 9 și 10 din Convențiune.

Faptele sunt notate de însuși Domnitorul Carol (Notes sur la vie du Roi Charles, 1894 vol. II passim): „O puternică animozitate se arată contra lui Strusberg. Agenții acestui rege al drumurilor de fer se disting în adevăr prin îngâmfarea și prin nepriceperea lor". In aceste împrejurări, Bismarck (de curând ridicat de la gradul de conte la cel de principe) a făcut o mare ofensă României, adrsându-se Turciei, ca putere suzerană, cerând guvernului ei să ne oblige a curma neînţelegerea cu concesionarii.

In asemenea împrejurări s'a votat o lege nouă, sancţionată la 20 Iulie 1871.

Iată principalele dispoziţiuni ale acestei legi :

„I .*Guvernul va urmări rezilierea concesiunii din 21 N. 1868 acordate ducelui de Ujest și de Ratibor, contelui Lehndorf și Dr. Strussberg înaintea tribunalului arbitral fără a întrerupe cursul acţiunilor civile şi penale deja deschise la Berlin.*

„II. *După reziliere, guvernul va îngriji de calea ferată neexploatabilă şi va exploata calea ferată în părţile exploatabile punând-o sub direcţiunea unui consiliu de administraţiune şi fără ca aceasta să angajeze responsabilitatea Statului.*

„III. *Aceste măsuri este autorizat guvernul a le lua și în cazul când, în timpul procesului, D-rul Strussberg şi consorţiul vor abandona exploatarea căilor ferate.*

„IV. *Posesorii de obligaţiuni vor fi obligaţi a se constitui în societate de acţionari, îndată după rezilierea contractului. Această Societate îşi ia asupră-şi toate drepturile şi toate îndatoririle concesionarilor primitivi.*

„VI. [*Dacă nu s'ar constitui în societate*] *Guvernul va despăgubiri pe toţi deţinătorii de obligaţiuni cu suma ce va ieşi din estimaţiune.*

„VII. *Guvernul este autorizat să facă toate cheltuielile pentru conservarea şi întreţinerea liniei până la cifra de 5.000.000 lei pe cari îi va lua prin cont curent din cifra de 9 milioane dela Cassa de Depuneri*".

(„Monitorul Oficial Nr. 158 de la 20 Iulie 1871).

Pe baza acestei legi s'a format la Berlin o societate a posesorilor de obligaţiuni pentru exploatarea căilor ferate din România. Ea avea să termine liniile concesionate în 1868 consorţiului reprezentat prin Strussberg ş. a. Noua societate va transforma în acţiuni noi obligaţiunile emise de acel consorţiu. Detaliile acestei întocmirii s'au stabilit prin legea de la 24 Decembrie 1871.

Acţiunile acestei societăţi erau în mâna streinilor; ei puteau decide, în adunările generale ale Societăţii, despre o sumă de chestiuni legate de interesele noastre şi puteau să le rezolve, deci, altfel de cum ne convenea nouă.

Astfel s'a ajuns la ideea *răscumpărării* căilor ferate de către Statul român, ceeace doreau şi acţionarii. Evenimentele au întârziat însă mai mult realizarea acestei idei.

In 1876 situaţiunea guvernului lui Lascar Catargiu[29] devenise nesigură din cauza unei puternice opoziţiuni a partidului naţional-liberal, cu mare răsunet în opinia publică, mai ales că cu el se unise şi parte din conservatori (unire cunoscută sub numele de coaliţia de la Mazar-Paşa). Guvernul lui Catargiu se retrase şi se formă altul cu doi fruntaşi conservatori : Generalul Florescu[30] şi M. Costache Epureanu[31]; iar, peste puţin timp, în Iunie 1876 conducerea ţării se încredinţă unui minister sub prezidenţa lui I. C. Brătianu.[32]

Nemulţumirea opiniei publice era, în chestia căilor ferate, hrănită şi prin împrejurarea că Strussberg, care fusese în fruntea asociaţiei căreia se dăduse construirea căilor ferate în 1868, fundase o bancă în Moscova, dăduse faliment şi fusese arestat. Dar, oricât ar fi dorit guvernul să găsească o soluţiune bună pentru ţară în acele momente, împrejurările din afară schimbară cursul evenimentelor şi aduseră războiul ruso-turc şi intrarea României în războiu; deci n'a mai fost răgaz pentru a se ocupa de această chestiune : ea rămase la o parte până în 1878.

După războiu s'au început iar tratativele cu concesionarii construcţiei de căi ferate; dar toată afacerea s'a sfârşit d'abia în 1880, din cauza complicaţiunilor externe şi interne. Parlamentarii conservatori se împotriveau cu tărie, ştiind că, în caz de neizbândă, guvernul prezidat de Brătianu va trebui să se retragă. Guvernul Germaniei ţinea ca acţionarii societăţii să fie satisfăcuţi în pretenţiile lor şi intervenea la guvernul român, ajungând să lege recunoaşterea independenţei României de două condiţiuni: modificarea articolului 7 din constituţie şi regularea chestiunii căilor ferate.

Guvernul nostru lucrase un proiect încă din Mai 1878; dar tocmai în Septembrie 1878 fu trimis la Berlin Dimitrie Sturdza,[33] care semnă o convenţiune, care — fireşte — avea să fie supusă discuţiei Parlamentului.

Pentru a se înţelege situaţiunea delicată în care se găsea guvernul, vom reproduce dintr'o scrisoare a Prinţului Bismarck[34] către Domnitorul nostru câteva pasagii: „Această afacere este un continuu izvor de neînţelegeri cari nu lasă a se statornici legături prieteneşti cu statul român. Ele au început cu Strussberg, care a atras în această afacere pe toţi marii proprietari din Silezia, cari, la rândul lor, au atras pe alţii, de diferite categorii sociale, încât astăzi întregul Berlin este interesat. Fiind deci în joc atâtea interese, este imposibil să nu ţinem seamă de ele. Regele însuşi a intervenit pentru a salva pe unii mari proprietari silezieni. Când lucrurile n'au mai mers cu Strussberg, s'a adresat lui Bleichröder, care a fost rugat şi care a socotit ca o onoare pentru dânsul să ia afacerea în mână şi regele a făcut chiar mai mult: a dat din caseta sa proprie în ajutorul proprietarilor. Este deci uşor de înţeles că toată lumea doreşte ca această penibilă istorie să se sfârşească. *Rezolvaţi* deci aceste două chestiuni (prima era modificarea art. 7) *cât mai repede, pentru ca să vă aşezaţi între statele independente*".

Se înţelege astfel situaţia guvernului: era vorba a face concesiunile posibile, permise de demnitatea şi de interesul măcar parţial realizat, pentru a se ajunge astfel la desăvârşirea actului măreţ al independenţei noastre (care urma să fie legalmente recunoscută de puterile Europei), din care Brătianu şi amicii săi îşi făceau atunci un titlu de glorie şi pe care s'a putut întemeia toată propăşirea noastră economică şi politică de atunci încoace.

Legea prezentată de guvern vine întâi în desbaterea Camerei şi, după discuţii violente, se votează în şedinţa de la 27 Noembrie 1879. Din discuţiile acestea urmase însă intercalarea unui amendament care nu convenea acţionarilor şi guvernului german. Brătianu comunică Domnitorului credinţa sa că Senatul va vota legea fără adaosul făcut de Cameră, dar, fiind aproape vacanţa de Crăciun, socoteşte că va trebui să se aştepte întrunirea Parlamentului după vacanţă. In Ianuarie 1880 Senatul a votat proiectul aşa cum îl prezentase guvernul; apoi Camera a discutat din nou şi a renunţat la modificarea introdusă de ea. Şi astfel legea s'a promulgat în ziua de 28 Ianuarie 1880.

Legea avea următoarele puncte principale:

„1. *Guvernul este autorizat a încheia cu Societatea acţionarilor c. f. r., alăturata convenţiune pentru cedarea definitivă şi fără restricţiune către guvernul român a administraţiei şi exploataţiunii c. f. a zisei Societăţi cu toate drepturile şi îndatoririle lor şi în genere toată gestiunea întreprinderii sociale precum şi pentru preschimbarea acţiunilor primitive şi de prioritate ale Societăţii în obligaţiuni de stat 6%.*

2. *Guvernul este autorizat a emite obligaţiuni de Stat 6% amortizabile în* 44 *ani pentru o sumă care nu va trece peste cifra de 237.500.000 lei noi, din care*

209.820.000 pentru preschimbarea acţiunilor primitive şi de prioritate în obligaţiuni de Stat 6%, iar restul de 27.680.000 pentru scopurile anume desemnate în convenţiunea menţionată.

3. *Se constitue pentru obligaţiunile de Stat 6% o ipotecă legală asupra întregii reţele a căii ferate Roman—Vârciorova cu ramurile ei, ipotecă scutită de orice inscripţiuni şi de orice drepturi sau cheltuieli fiscale.*

4. *Guvernul este autorizat a face cheltuielile prevăzute în convenţiune. Aceste cheltuieli se vor acoperi în limitele prevăzute prin art. 2 prin obligaţiuni de Stat 6%...*

6. *In termen de cel mult o lună, guvernul este obligat a lua măsurile pentru transferarea reşedinţei Societăţii în Bucureşti".*

(„Monitorul Oficial", No. 23 din 21 Ianuarie 1880).

In expunerea de motive Sturdza zice:

„Concesiunea societăţii acţionarilor are o durată de 90 de ani, de la 1 Iulie 1871 până la 1 Iulie 1962. Capitalul de construcţie a fost fixat la suma de lei 248.130.000 şi este garantat de Stat prin o anuitate determinată înscrisă în budgetul de cheltuieli. Prin această garanţie fixă acţionarii sunt asiguraţi că ori şi care ar fi venitul net al căilor ferate exploatate de dânşii, ei nu pot suferi o scădere a anuităţii odată determinată, căci Statul e legat să plătească în fiecare an o sumă mai mică sau mai mare după cum veniturile căilor ferate cresc sau descresc. O parte a budgetului depinde prin urmare de o întreprindere a cărei direcţiune nu e în ţară, iar direcţiunea acestei întreprinderi nu are niciun interes al ei propriu ca excedentul net al venitului căilor ferate să crească şi să uşureze budgetul Statului, fiindcă Societatea nu profită în niciun caz de acest spor, ci al treilea, Statul român. Statul dar poartă o garanţie reală a cărei greutate nu depinde de dânsul a o micşora, pe când Societatea e sigură de a încasa cu certitudine procentele şi amortizarea capitalului de construcţie şi nu are niciun stimulent de a-şi da osteneala pentru a spori venitul căilor ferate".

Apoi în stabilirea tarifelor şi a modului de a servi anume transporturi, cum este chestia produselor agricole, a cerealelor în primul rând, Societatea nu are nici un motiv să ţie seama de interesele de moment ale Statului român şi poate produce mari pagube agricultorilor cari nu se pot ţinea de angajamentele lor de predare luate faţă de cumpărătorii din străinătate.

„Nu e interesul Statului ca administraţia căilor ferate să fie în mâinile unei Societăţi de acţionari streini şi nu e nici bine nici prudent ca această administraţie să nu fie în mâinile ţării. Căile ferate sunt mijloace de strategie de prima ordine şi e un pericol pentru orice stat ca ele să fie ale unei societăţi streine. Cât timp căile ferate ale unui stat mic aparţin unei societăţi de acţionari, ele pot deveni proprietatea unuia din statele vecine care n'ar avea decât să cumpere pe seama sa o câtime suficientă de acţiuni pentru a dispune de adunările generale, de direcţiune şi de întregul personal al liniilor.

„Singurul mijloc este răscumpărarea căilor ferate. Prin ea statul va căpăta în mânile sale din 1407 km 1183 km, adică 84% din totalul liniilor existente.

„Răscumpărarea a fost prevăzută în concesiunea primitivă, dar ea nu putea avea loc decât după 30 de ani de la deschiderea primei secţiuni, adică la 1902. A aştepta încă 22 de ani ar fi a decreta o catastrofă economică.

„Răscumpărarea nu se poate efectua legalmente şi practic decât astfel: gu-

vernul să capete proprietatea și administrația căilor ferate, luând asupră-și obligațiunile societății în suma emisă. Operațiunea aceasta constă deci în răscumpărarea de către Stat a capitalului de construcțiune. Acest capital e reprezentat prin acțiunile primitive și de prioritate și prin obligațiunile 6%. Numai detentorii acțiunilor primitive și de prioritate sunt adevărații asociați. Detentorii obligațiunilor simple sunt niște simpli creditori ai acționarilor. Acționarii au deci a le plăti datoria lor.

Statul nu poate cumpăra acțiunile, căci ar fi nevoit să facă un împrumut de 300 milioane și în acest timp acțiunile s'ar urca. Nu poate decât să preschimbe acțiunile Societății în titluri de Stat. El ar deveni posesorul acțiunilor primitive și de prioritate și ar da obligațiuni de stat.

„Prin convențiunea ce se propune, guvernul va avea la dispozițiunea sa sumele necesare pentru preschimbarea titlurilor societății în titluri ale Statului, pentru ameliorarea căilor ferate și pentru exploatarea lor.

„Atunci căile ferate vor aparținea țării, vor fi exploatate în profitul țării și astfel independența ei va fi asigurată în mod practic. (Mon. Of., Noembrie 1879, p. 7333).

Convențiunea avea să se facă cu băncile „Disconto Geseleschaft" și „Bleichröder".

Iată principalele articole din această convențiune:

„1. *Societatea acționarilor căilor ferate române cu reședința la Berlin, cedează și transferă Statului român cu începere de la 1 Ianuarie 1880 și pentru tot restul duratei concesiunii primitive în mod definitiv și fără nicio restricțiune, administrațiunea și exploatațiunea întregii rețele a liniilor ferate ale Societății și în genere toată gestiunea întreprinderii sociale.*

„2. *In contra cesiunii complete a administrațiunii și a exploatațiunii, Guvernul român se obligă a preschimba acțiunile primitive și acțiunile de prioritate în titluri emanate direct dela Stat și create în condițiunile mai jos precizate.*

„3. *Obligațiunea de a preschimba va începe cel mai târziu la 1 Martie 1880...*

„Consiliul de supraveghere și reprezentațiunea executivă ale Societății vor publica imediat un avis prin care vor invita în numele guvernului român pe detentorii de acțiuni cari vor voi să preschimbe titlurile, să depuie acțiunile lor în localurile desemnate în acest avis... Ei vor primi certificate cari le vor da dreptul la noi obligațiuni ale Statului.

„4. *Consiliul de supraveghere, pentru a constata că majoritatea absolută a capitalului și a acțiunilor, au fost prezentate, în termenul stipulat, la preschimbarea în titluri noi de 6% ale Statului român, va prezenta un certificat detaliat al Băncii imperiului german atestând că această majoritate se află deja depusă la zisa bancă.*

„Dacă majoritatea absolută menționată mai sus n'a fost prezentată până la 1 Martie 1880, convențiunea de față va fi nulă.

„6. *Acțiunile date guvernului român vor fi însemnate cu un timbru care va constata scoaterea lor din circulațiune.*

„S'a păstrat tuturor acestor acțiuni drepturile lor statutare; ele participă la amortizare.

„Numai guvernul va putea exercita prin mandatarii săi toate drepturile legate de titlurile cele vechi astfel preschimbate și mai ales să uzeze de ele pentru a lua parte și a vota în adunările generale.

„8 *Totalitatea titlurilor de emis de către Statul român este fixată la suma de franci nominali 237.500.000 sau 190.000.000 mărci, din cari 209.820.000 fr. vor* *fi exclusiv destinați pentru preschimbarea acțiunilor primitive și de prioritate, iar restul de fr. 27.680.000 vor rămânea la dispozițiunea guvernului român însă numai pentru a servi la îmbunătățirea drumului de fer, la plata cheltuielilor, etc., și în fine pentru a servi la diferitele transacțiuni pe cari direcțiunea princiară le va face pentru stingerea unor procese.*

„Cifra de fr. 237. 500.000 nu va fi întrecută niciodată. Insă guvernul român își rezervă facultatea de a emite titluri noi cari vor servi la preschimbarea obligațiunilor de 6% actualmente existente.

„9. Anuitatea necesară pentru serviciul intereselor și amortizării titlurilor create va fi regulat plătită de guvernul român.

„Aceste obligațiuni noi vor fi asigurate printr'o ipotecă asupra întregei rețele a liniei Roman— Vârciorova cu ramurile ei și prin venitul net al monopolului tutunurilor.

„10. Guvernul român se obligă a nu aliena căile ferate menționate pe tot timpul cât va dura amortizarea noilor obligațiuni de 6%.

„12. Guvernul român se obligă a plăti purtătorilor de acțiuni primitive... o bonificațiune de 2% asupra valorii nominale plătibile în momentul preschimbării.

„13. Guvernul român se obligă a plăti acțiunilor primitive și de prioritate cari nu s'au prezentat spre a fi preschimbate în obligațiuni noi ale Statului :

a) *la 1 Martie a fiecărui an acțiunilor de prioritate un venit fix de 8% pe an,*

b) *la 1 Iulie a fiecărui an acțiunilor primitive un venit fix de 3½% pe an.*

„Guvernul român se obligă a face cele necesare pentru amortizarea tuturor acțiunilor primitive și de prioritate conform cu Statutele și cu tabelele de amortizare.

„15. Sumele necesare pentru plata dividentelor și amortismentelor acțiunilor primitive și de prioritate fac parte din pasivul societății, care trece către guvernul român dela 1 Ianuarie 1880.

„Noile obligațiuni de stat, scutite de impozitele actualmente existente sau care s'ar putea decreta în urmă, vor purta o dobândă de 6%..., vor fi amortizabile în 44 de ani prin trageri la sorți semestriale.

„19. Dela 1 Martie 1880 Statul român va executa singur și exclusiv drumurile de fer Roman-Vârciorova printr'o direcțiune sau reprezentațiune executivă compusă din mai mulți membri numiți de guvernul român și revocabili după placul lui.

Direcțiunea drumurilor de fer va purta titlul de **Direcțiunea princiară a căilor ferate române**".

Alături de chestiunea politică, era chestiunea financiară. In afară de discuțiile din Parlament, în cari, firește, s'a vorbit și de aceasta, au apărut atunci două broșuri de polemică : una scrisă de Const. S. Marcovici, care era contabilul Creditului funciar rural întitulată „**Zisa** *răscumpărare a căilor ferate române*". (Buc. 1879), în care susținea că Statul român va plăti, prin anuitățile stabilite o sumă enormă, și alta scrisă de N. Kirilov, care era contabil la Casa de Depuneri, și întitulată : **Un răspuns** *d-lui C. S. Marcovici. Răscumpărarea căilor ferate române*. (Buc. 1879) în care combate calculele lui Marcovici.

Haret socotește că chestiunea merită a fi studiată într'un spirit obiectiv științific și publică (în 1880) lucrarea sa întitulată : „*Cercetări asupra părții financiare a proiectului de răscumpărare a căilor ferate*", pe care o reproducem în paginele ce urmează.

Gh. Adamescu.

CERCETĂRI ASUPRA PĂRȚII FINANCIARE A PROECTULUI DE RĂSCUMPĂRARE A CĂILOR FERATE

1880

Chestiunea Căilor Ferate este una din acelea cari au pasionat mai mult opiniunea publică în țara noastră în anii din urmă; și aceasta cu drept cuvânt, din cauza gravelor consecințe ce pot avea pentru viitor deciziunile luate într'însa. Astfel fiind, s'ar fi putut crede că, mai ales în urma experienței scump plătite a trecutului, Guvernul și Corpurile Legiuitoare erau să lase timpul necesar pentru ca chestiunea să fie desbătută și studiată de toți cei cari puteau contribui a aduce oarecare lumină într'însa. Se știe că a fost tocmai din contra.

Trebue să credem că, dacă s'a lucrat astfel, cată să fi existat vreun motiv imperios pe care împrejurările nu permit însă a-l desveli în ochii lumii. Oricum ar fi, proiectul Guvernului se desbătuse, se luase în considerațiune și se și adoptase până când eu să pot scăpa de alte ocupațiuni ce aveam pe atunci și să mă aplic la studiul chestiunii. De atunci crezusem inutil a mai interveni într'o desbatere care se părea terminată, când vacanțele Camerei Deputaților, cari au coincidat cu ale Universității, reîntoarcerea afacerii la Cameră și discuțiunea destul de vie, — lucru rar în materie de cifre, — ce s'a aprins între DD. Marcovici și Kirilov, m'au decis să public aceste câteva pagini asupra părții financiare a proiectului propus de D. Ministru de Finanțe. Sper că dintr'însele se va vedea lămurit până la ce punct este el avantagios.

Din nenorocire însă, pe cât mi se pare mie, dificultatea cea mare a lucrului nu stă în a se ști dacă, din punct de vedere curat numeric, proiectul Guvernului este sau nu avantagios; căci asupra acestui punct niște calcule făcute cu băgare de seamă vor sfârși prin a pune în evidență adevărul, fără controversă posibilă. Totul este de a se vedea dacă avantajele băneşti ce ne procură conversiunea propusă nu cumva sunt compensate cu prisos prin alte neajunsuri de acelea cari nu se pot pune în formule. Numai aceasta este partea ce trebue să îngrijească cu deosebire pe naţiune şi pe deputaţi; căci, încă odată, partea numerică este foarte lesne de elucidat.

I.

Mai 'nainte de a intra în desbaterea proiectului Guvernului, să reamintim în scurt principiile pe cari se bazează calculele în materie de împrumuturi mari, cum sunt acele pe cari le contractează un Stat.

Să nu se creadă că sunt de prisos detaliile elementare în cari trebue să intrăm; în orice calcule trebue să se ştie cu preciziune sensul termenilor întrebuinţaţi şi lucrurile ce se consideră ca cunoscute. Pentru a dovedi importanţa acestor lămuriri preliminare, îmi va fi destul a spune că divergenţa asupra unuia din punctele cari despart pe D-nii Marcovici şi Kirilov vine din o neînţelegere asupra unei definiţiuni.

Când un Stat contractează un împrumut pe un termen lung, restituirea capitalului împrumutat nu se face într'o singură dată la ziua scadenţei, căci aceasta ar încărca peste măsură budgetul anului în care cade scadenţa; ci, din contra, pe fiecare an se plăteşte dobânda la capitalul înprumutat, plus o sumă, în genere destul de mică, calculată astfel încât sumele plătite pe fiecare an, împreună cu dobânzile lor acumulate până la ziua scadenţei, să echivaleze cu capitalul împrumutat împreună cu dobânzile lui până în aceeaşi zi. Suma astfel plătită în plus peste dobânda cuvenită anualmente capitalului cu scop de a stinge datoria într'un timp determinat este ceea ce se chiamă *amortisment*; iar suma totală plătită pe fiecare an, dobânda plus amortismentul, se chiamă *anuitate*.

Se disting două cazuri: *a*) când amortismentul e constant; *b*) când anuitatea e constantă. Să examinăm pe rând pe fiecare:

a) Fie C capitalul împrumutat pe timp de n ani cu dobânda de p la 100 sau de r la 1 pe an. Dobânda cuvenită capitalului pe anul întâiu este Cr. Să presupunem însă că la finele anului întâiu, când plătim dobânda Cr, mai plătim şi suma a

din capete ; a este amortismentul. Datoria acum s'a redus la $C—a$, așa că dobânda ce vom avea să plătim pe anul al doilea este numai de $(C—a)$. Dacă însă vom plăti încă și amortismentul a, datoria se va reduce la $C—2a$. Tot asemenea în anii următori, datoria va scădea la $C—3a$, $C—4a$.... $C—na$; și dacă $a=\frac{C}{n}$, datoria se va stinge după n ani, căci atunci $C—na=0$.

Amortismentul astfel socotit îl voiu numi *amortisment de felul întâiu*. In cazul acesta, amortismentul a fiind constant, anuitatea nu e constantă, căci ea este $Cr+a$ pe anul întâi, $(C—a)\,r+a$ pe anul al doilea, $(C—2a)\,r+a$ pe anul al treilea,... $(C—pa)\,r+a$ pe anul al $(p+1)$,-lea....

Acest fel de amortisment este cel care se întrebuințează mai rar în împrumuturile făcute de State ; eu, cel puțin, nu cunosc nici un împrumut public făcut în aceste condițiuni.

b) Fie încă C capitalul împrumutat, n numărul anilor împrumutului, r dobânda la 1, și să presupunem că pe fiecare an s'ar plăti o sumă fixă, A, care este anuitatea.

Dobânda cuvenită capitalului pe anul întâiu este Cr ; însă dacă A este mai mare de cât Cr, escedentul, pe care îl vom numi a, va servi pentru stingerea unei părți din datorie ; așa că pe anul al doilea datoria este numai de $C—a$ și dobânda ei numai de $(C—a)r$. Insă fiind că se plătește ca anuitate tot suma fixă A, partea rămasă disponibilă în anul al doilea este de $A—(C—a)r$, sau $A—Cr+ar$, sau $a+ar$, de oarece :

$$a=A—Cr.$$

Prin urmare, pe când în anul întâiu s'a amortizat suma a, în anul al doilea se va putea amortisa $a+ar$ sau $a\,(1+r)$. Tot asemenea în anii următori, amortismentul va fi succesiv $a\,(1+r)^2$, $a(1+r)^3$,....$a\;(+r)^{n-1}$. Cantitatea a se poate calcula astfel ca după n ani să nu mai rămână nimic din datorie.

In cazul de față, anuitatea A este fixă, pe când amortismentul merge crescând pe fiecare an. Acestui fel de amortisment îi vom zice *amortisment de felul al doilea* ; acesta și este cel întrebuințat de ordinar.

Formula care leagă între sine quantitățile C, A, r, n este

$$\text{(1)} \qquad C(1+r)^n=\frac{A[(1+r)^n—1]}{r}.$$

Dacă punem, ca mai sus,

(2) $$A=Cr+a,$$
formula (1) ne dă

(3) $$a=\frac{Cr}{(1+r)^n-1},$$

equaţiune care permite a calcula amortismentul a de pe anul întâiu.

Cât pentru amortismentul a^p) de pe un an oarecare, p, el va fi dat prin formula

(4) $$a_p=a\,(1+r)^{p-1}=\frac{Cr(1+r)^{p-1}}{(1+r)^n-1}.$$

Când împrumutul este emis în acţiuni sau obligaţiuni, oricare din cele două moduri de mai sus ar fi adoptat, amortismentul de pe fiecare an serveşte a cumpăra un număr oarecare de acţiuni sau de obligaţiuni, cari se anulează, micşorând astfel datoria.

Fac apel la indulgenţa lectorului pentru aceste amănunte ştiinţifice cari pot părea fastidioase, însă cari sunt indispensabile pentru înţelegerea celor ce urmează.

II.

Acestea fiind stabilite, şi până a nu trece la analizarea proiectului D-lui Sturdza, mă voiu opri un moment asupra concesiunii primitive din 1868.

După art. 7, capitalul recunoscut necesar pentru construcţiune e de 270,000 fr. pe kilometru ; după art. 15, se garantează acestui capital o dobândă anuală de 7 ½ % ce „începe dela emiterea obligaţiunilor şi se întinde fără schimbare pe tot timpul duratei concesiunii", care e de 90 de ani, tot după art. 15.

Prin art. 17 se fixează încă „pentru amortizarea fondului de construcţiune, o sumă de 1 la mie pe fiecare an la capitalul total, pentru a stinge cu desăvârşire acest capital în opt-zeci şi doi de ani cel mai târziu".

In fine prin art. 11 al convenţiunii din ²/₁₄ Februar 1872, lungimea totală a liniilor construite s'a fixat la 919 kilometri ; aşa că capitalul de construcţiune e de 248.130.000 fr., dobânda lui anuală de 18.609.750 fr., iar fondul anual de amortisment de

248.130 fr.; anuitatea este dar constantă; ea e de 18.857.880 fr. Prin urmare felul de amortisment adoptat pentru plata datoriei căilor ferate era cel pe care l-am numit *amortisment de felul al doilea.*

D-l Kirilov în broşura sa „*un răspuns D-lui C. S. Marcovici*" la pag. 10 și 11 găsește că cuvântul de *amortisment* este impropriu în cazul de față. Adevărul este că D. Kirilov nu dă numele de amortisment decât celui pe care l-am numit mai sus *amortisment de felul întâiu*, și care în adevăr nu e cel întrebuințat în concesiune. Insă s'a văzut că și în cazul plății prin anuități constante, amortismentul tot exista, și acesta e foarte bine știut de financiari, cari, când contractează un împrumut cu anuități fixe, redigează îndată un tabel de amortismente pe fiecare am. Aceste amortismente ocupa coloana a 6-a din anexa D la expunerea de motive a D-lui Ministru de Finanțe, deși operațiunea propusă de d-sa e tot un împrumut cu anuități constante. Pe de altă parte cuvântul *amortisment* e consacrat chiar prin termenii concesiunii (art. 17) și ai convențiunii (art. 11).

Dar în fine chestiunea aceasta a denumirii e cu totul secundară; și apoi, dificultatea, dacă e dificultate, este înlăturată prin distingerea celor două feluri de amortismente, pe care am stabilit-o mai sus.

După termenii concesiunii, confirmată prin convențiunea ulterioară, avem dară:

$C = 248.130.000$ lei;
$A = 18.857.880$ lei;
$n = 90$ ani;
$p = 7\frac{1}{2}\%$, sau $r = 0,075$.

Cantitățile C, A, n, r sunt legate între ele prin equațiunea (1), așa că trei dintr'însele fiind date, se poate calcula cea de a patra. Vom vedea însă că sistemul de valori dat mai sus nu satisface equațiunea (1), și prin urmare că, dacă luăm ca date pe trei oarecari dintr'însele, cea de a patra este falsă.

In adevăr, dând în (1) lui A, C, r, n valorile precedente găsim:

$$A(1+r)^n = 166\ ,,510,307,650,00;$$

$$\frac{C[(1+r)^n-1]}{r} = 168,,478.954.468,18,$$

pe când aceste două numere ar trebui să fie egale.

Să rezolvăm însă deadreptul equațiunea (1) luând pe rând ca necunoscute pe A, C, *r*, *n*. Vom găsi astfel :

a) că dacă capitalul de plătit e de 248.130.000 lei, timpul de plată de 90 ani și dobânda de 7½%, anuitatea trebue să fie de 18.637.525 lei, 55, iar nu de 18.857.880 lei. Diferența în plus e de 220.354 lei, 45.

b) Că cu anuitatea de 18.857.880 lei cu 7½% în 90 de ani se stinge o datorie primitivă nu de 248.130.000, ci de 251.063.634 lei 63, adică cu 2.933.634 lei 63 mai mult.

c) Că pentru ca un capital de 248.130.000 lei să fie stins în 90 de ani cu anuitatea 18.857.880, dobânda admisă trebue să fie nu de 7½% pe an, ci de 7,58880605 ;

d) Că un capital de 248.130.000 lei cu anuitatea de 18.857.880 lei și cu dobânda de 7½% pe an se stinge nu în 90 de ani, ci în 59 ani, 8824.

Acest rezultat este de o mare gravitate ; el dovedește că concesiunea primitivă ne-a obligat să plătim mai mult de cât eram datori, și diferența nu e de neglijat ; ea reprezintă un capital de 2.933.634,63 lei în 1870, sau o creștere de 220.354,45 lei la anuitatea plătită acționarilor în timp de 90 de ani. Capitalul de 2.933.634 lei, 63, împreună cu dobânzile sale acumulate, va reprezinta în 1960, la expirarea concesiunii, un capital de 1.968.646.818 lei, 18.

Diferitele persoane cari s'au ocupat de chestiunea răscumpărării, n'au insistat destul asupra acestui punct, de și nimeni nu a scăpat din vedere nepotrivirea dintre cele patru cifre fixate prin concesiune. D. Marcovici în broșura sa (pag. 15 și 16), precum și D. N. Nicorescu în excelentul său discurs pronunțat în Camera Deputaților (ședința din 12 Noembrie 1879 ; în broșură pag. 50) au stabilit și au recunoscut neted eroarea. D. Kirilov (broșura pag. 23) nu recunoaște că este eroare ; D-sa demonstrează că diferența de 2.933.634 lei 63 provine de acolo că, calculul a fost făcut nu pe baza dobânzii 7,5 pe an, ci acelei de 7,58880605. Aceasta este riguros exact ; însă cu asta nu se dovedește că nu este eroare ; din contră. Când concesiunea spune curat la art. 15 al. 5 că dobânda garantată de Stat este de 7%, când convențiunea în art. 5 al. 4, art. 11 al. 5 și 7 fixează aceeași dobândă, cum de se fac calculele pe dobânda de 7,58880605 pe an? D. Kirilov, pe cât înțeleg, admite că deoarece eroarea nu e decât de aproape 9 bani în dobândă la suta de franci, se poate neglija; eu nu împărtășesc de loc acest mod de a vedea. Fără a alerga cineva la considerațiuni mai înalte, înțelege că o eroare care ne costă 220.354, lei 45 pe fiecare an în timp de 90 de ani, nu este de neglijat, ori de unde ar proveni ea; dar nici nu e greu de a vedea de unde vine că o diferență atât de mică asupra lui r poate produce o variațiune așa de considerabilă asupra lui C sau A.

Equațiunea (1) se poate scrie și așa:

$$C(1+r)^n(r+1-1)=A[(1+r)^n-1],$$

sau

$$C(1+r)^{n+1}-(A+C)(1+r)^n+A=0.$$

Dacă considerăm pe C și n ca constante, cari în cazul nostru sunt egale cu 248.130.000 și 90, vedem că anuitatea A este funcțiune de r. Variațiunile acestei funcțiuni se pot studia construind curba ale cărei abscise să fie cantitățile $1+r$, iar ordonatele A; se va vedea atunci că pentru foarte mici variațiuni ale lui $1+r$, ordonatele variază cu o extremă repeziciune. Tot același lucru s'ar vedea și dacă am lua ca ordonate pe C, considerând pe A ca constant. Din aceasta urmează că dobânda este elementul cel mai simțitor în calculul anuităților, și că cea mai mică variațiune în procent poate să modifice într'un chip foarte considerabil condițiunile împrumutului. De aceea, mai ales când termenul e foarte lung, un împrumut făcut cu o dobândă oarecare poate să fie tolerabil, pe când unul cu o dobândă puțin superioară devine o sarcină teribilă pentru Stat. Tot de aceea, în 1868, o alterațiune numai de 9 bani la procent a putut aduce în anuitate creșterea considerabile de 220.354 lei, 45.

D. Emiliu Costinescu,[35] în discursul ce a ținut la Cameră, tot în chestia rescumpărării, a zis între alte:

„Dar se zice: cu cota de amortizare de 1 la mie și cu dobânda de 7 ½, capitalul de construcțiune se amortizează în 60 de ani, iar nu în 90, nici în 82.

„La aceasta voiu răspunde că amortizarea ce era prevăzută în convențiunea de la 1868 nu se face după regulele obișnuite; acea amortizare nu se face, ca de obiceiu, numai din cota de amortisare plus dobânda obligațiunilor amortizate, ci după chibzuința concesionarilor, dintr'un fond special de amortizare; și acest fond nu se compune numai din 1 la mie și dobânda capitalului amortizat, ci din diferite venituri: din cota de amortizare, din o parte oarecare din beneficiul net și altele. Din acest fond compus astfel se face amortizarea în timp de 82 de ani. O altă probă că amortizarea nu se făcea după regulele obișnuite este și aceea că se prevede că amortizarea să se efectueze prin cumpărarea obligațiunilor la bursă.

,,Invederat dar este că aci ne aflăm în fața unei amortizări ieșite din regulele obișnuite.

,,Este o amortizare specială, cum au voit să o prevadă părțile ce au făcut contractul; iacă de ce nu este o absurditate când se zice că amortizarea se va face în 82 de ani cel mult''.

Această teorie a amortismentului ce nu se face după regulele obișnuite este cu desăvârșire neadmisibilă. Cifrele nu sunt ca articolele de lege, cărora doi comentatori să le dea două sensuri opuse. In orice amortisment, ratele anuale împreună cu dobânzile lor acumulate până în ziua scadenței trebue să fie echivalente cu capitalul primitiv împreună cu dobânzile sale până în aceeași zi; dacă nu e așa, calculul e rău făcut. Ei bine, este sau nu adevărat că capitalul de construcțiune s'a fixat la suma de 248.130.000 lei, iar dobânda anuală la 7½%? Este sau nu adevărat că ne-am obligat să plătim pe fiecare an câte 18.857.880 lei în timp de 90 ani? Este sau nu adevărat că aceste rate anuale cu dobânzile lor de 7½% acumulate în timp de 90 de ani reprezintă un capital primitiv de 251.063.634 lei, 63? Dacă este așa, noi am contractat o datorie cu 2.933.634 lei, 63 mai mare decât cea adevărată; nici o discuțiune nu mai încape asupra acestui punct. Singura particularitate pe care o recunosc amortismentului din concesiune este numai că ne-a obligat să plătim mai mult decât eram datori, ceea ce, în adevăr, nu se vede prea des.

Cât pentru împrejurarea că afară de dobânda anuală și de suma de 1 la mie, se mai plătea concesionarilor și alte sume, cum cota de amortizare, o parte oarecare din beneficiul net, etc., și că amortizarea se făcea prin cumpărarea obligațiunilor la bursă, în loc de tragere la sorți, toate acestea nu dovedesc altceva decât că deficitul ce rezulta pentru noi din concesiune a fost în realitate încă mai mare decât 2.933.634,63 lei.

Concesiunea s'a acordat în 1868; de atunci sunt mulți ani, de aceea nu știu dacă desbaterea s'a făcut tot de urgență, sub influența vre-unor motive imperioase cari nu permit întârzierea. Dacă însă este așa și dacă eroarea de calcul care ne costa pe fiecare an peste 220.000 lei, este consecința precipitării cu care mandatarii țării au fost siliți să desbată o chestiune de asemenea gravitate, ar trebui cel puțin ca aceasta să ne servească de lecțiune pentru viitor și să ne facă să punem mai multă atențiune în relațiunile noastre cu niște indivizi cari au dat până acum atâtea dovezi că posedă puține scrupule și multă abilitate, ca să nu zic altceva.

Ca să termin cu chestiunea concesiunii din 1868, se cuvine să ating în treacăt un punct asupra căruia a fost oarecare discuțiune între DD. Marcovici și Kirilov. Cel dintâi, în broșura sa la pag. 16 zice că cu plata anuității de 18.857.880 lei în timp de 90 de ani *se amortizează* un capital de 2.216.828.702 lei, 85. Mai târziu, într'un articol publicat în *Binele Public* din 30 Noembrie, a explicat că această cifră este valoarea în 1960 a sumelor anuale de 248.130 lei cu dobânzile lor capitalizate. Astfel fiind, cuvântul de *amortizare* cum îl întrebuințează D. Marcovici este impropriu. In adevăr, suma întreagă de 18.857.880 lei se poate descompune, după cum am arătat mai sus, în 18.609.750 lei care este dobânda anuală a capitalului primitiv de 248.130.000 lei și în 248.130 lei; acești din urmă, capitalizați în timp de 90 de ani, dau în adevăr 2.216.828.702 lei, 85. Insă și suma de 248.130 lei se descompune în 27.775 lei, 55, care servă pentru a amortiza capitalul primitiv de 248.130.000 lei, și în 220.354 lei, 45 cari fiind plătiți pe d'asupra se capitalizează cu dobânzile lor și formează în 1960 suma de 1.968.698.702 lei, 85. Ca verificare, se poate observa că acest număr, adunat cu capitalul primitiv, dă tocmai 2.126.828.702 lei, 85. Cu aceasta însă nu înseamnează că anuitatea de 18.857.880 lei *amortizează* acest din urmă capital; ea amortizează capitalul de 248.130.000, și mai dă un excedent care echivalează cu un capital în 1960 de 1.968.698.702 lei, 85, sau cu un *capital primitiv amortizat* de 2.933.634,63.

In privința calculelor înseși, trebue să spun că, când e vorba de împrumuturi mari, unde are a face cineva cu numere foarte considerabile, e în genere prudent a face calculele direct, sau cel puțin a controla la fiecare pas rezultatele date de tablele de anuități. Pentru aceste calcule, tablele de logaritmi cu cinci şi chiar cu şapte zecimale nu sunt de ajuns; în cazul de față ar trebui să se meargă până la 15 zecimale pentru a putea garanta cea din urmă cifră a numerelor dobândite. In adevăr, în calculele precedente, noi am avut a face cu numere de 12 cifre, și chiar de 14, dacă ţinem seama și de centime; însă se ştie că în tablele de logaritmi cu cinci zecimale, logaritmii numerilor de patru cifre pot să nu difere decât în unitățile de al cincilea ordin zecimal.

Prin urmare dacă între două numere de patru cifre am intercala toate numerele de patru cifre urmate de 10 zecimale, ce sunt cuprinse între acele două, mantisele logaritmilor lor ar diferi între dânsele, după regula părţilor proporţionale, cu o cantitate care s'ar pogorî până la o cifră de al cincilea ordin zecimal împărţită cu 1 urmată de 10 nule, ceea ce face o cifră de al 15-lea ordin zecimal; cu alte cuvinte, logaritmiii a două numere consecutive de câte 14 cifre pot să nu difere decât tocmai în a 15-a zecimală.

Calculele D-lui Kirilov sunt făcute cu logaritmii cu 5 zecimale; ale D-lui Marcovici, după tablele lui Violeine; ale mele cu logaritmii cu 7 sau 8 zecimale, mărginindu-mă numai a controla unele cifre mai importante cu logaritmii lui Briggs de 20 și de 61 de zecimale ce se află în ediția Firmin Didot a tablelor lui Callet; cu ajutorul acestor table și prin oarecari artificii de calcul am reușit într'un caz a obține un număr cu 31 zecimale exacte. Oricum ar fi, cele trei serii de calcule precedente nefiind făcute în întregimea lor cu logaritmii cu 15 zecimale, numerele dobândite nu prezintă siguranța decât în primele șapte cifre ale lor, afară de câteva dintr'însele cari sunt calculate cu toată rigoarea; astfel se explică diferențele, altminteri puțin considera bile, ce se văd între numerele calculate de mine și aceleași numere calculate de DD. Marcovici și Kirilov. Aceasta însă nu infirmă întru nimic concluziunile la cari am ajuns: numai dacă ar fi fost vorba a se face calculul efectiv al amortismentului erau indispensabile tablele cu 15 zecimale; însă pentru demonstrațiune, numerele ce am dobândit sunt destul de exacte.

Aceleași observațiuni se pot face și asupra calculelor și numerelor ce vor urma.

III.

Se trec acum la proiectul de rescumpărare propus de guvern; și mai întâi să-l rezumez în puține cuvinte.

Prin convenția din 2/14 Februar 1872, capitalul de construcție se fixase la 248.130.000 lei, din care nu s'au emis acțiuni *primitive* decât pentru suma de 245.160.000 lei. Insă mai în urmă, pentru a face față trebuințelor, s'au emis în 1873 *acțiuni de prioritate* și în 1876 *obligațiuni* 6% *ale* Societății.

Acțiunile de prioritate s'au emis în sumă de 48.290.062 lei 50 bani; lor le este asigurată o dobândă minimum de 8%; se amortizează în timp de 70 de ani, până în 1943, prin trageri la sorți anuale, și la tragere li se bonifică 33⅓% din fond; adică că pentru o acțiune de 100 lei se plătește 133 lei ⅓. Din acțiunile de prioritate s'au amortizat deja până la 1 Ianuar 1880 o sumă de 405.562 lei, 50 bani, rămânând încă în circulațiune pentru valoarea nominală de 47.884.500 lei.

Obligațiunile 6% se amortizează până la 1899; dintr'însele au mai rămas în circulație la 1 Ianuar o valoare nominală de 47532000 lei.

Cât pentru acțiunile primitive, care constituesc fondul de construcțiune, cari dau 7½% dobândă și se amortizează în 90 de ani, până la 1960, în urma amortizărilor ce au avut loc deja, ele s'au redus, la 1 Ianuar 1889, la valoarea nominală de 243.291.750 lei. (*Vezi*, pentru toate aceste detalii, expunerea de motive a D-lui Ministru de Finanțe, pag, 12, 13, 17, și anexele ei).

Proiectul guvernului este de a se rescumpăra acțiunile primitive și de prioritate, plătindu-le cu obligațiuni 6% pe cari le-ar emite Statul și cari ar fi amortizabile în 44 de ani, până în 1923. Această preschimbare de titluri s'ar face în condițiunile următoare:

Acțiunile primitive s'ar răscumpăra pe prețul de 60%, cu alte cuvinte că pentru acțiuni în valoare nominală de 100 lei să se dea obligațiuni de ale Statului în valoare nominală de lei 60. Acțiunile ce s'ar prezenta la schimbare până la 1 Martie 1880 ar primi, afară de aceasta, un premiu de 2% în numerar; cele ce ar veni după acest termen nu ar mai avea drept la premiu. Acțiunilor ce nu s'ar schimba de loc, Statul le garantează o dobândă anuală de 3⅓% asupra valorii nominale până la amortizare, care se va face tot până în 1960.

Acțiunile de prioritate să se rescumpere pe $133\frac{1}{3}$ suta; celor ce s'ar prezinta până la 1 Martie 1880 se li se dea și un premiu de $2\frac{1}{2}\%$ în numerar. Celor ce nu s'ar preschimba de loc, li se garantează un venit anual de 8% asupra valorii nominale. Amortizarea acestora se va face tot până în 1943.

In fine Statul ar lua asupra-și plata anuității obligațiunilor 6% ale Societății, până la stingerea lor în 1899.

E adevărat că după termenii convențiunii din 1872, art. 11, acțiunile de prioritate și obligațiunile 6% sunt emise pe riscul și pericolul Societății; însă nu-mi aparține mie se discut dacă Statul putea sau nu face altfel; discursurile pronunțate în Corpurile Legiuitoare, și în special acela al D-lui Nicorescu, pag. 36--41, s'au ocupat de ajuns de această chestiune. Scopul meu este numai de a studia operațiunea așa cum este propusă.

Pentru a efectua dar toate aceste operațiuni, guvernul propune a se emite obligațiuni de ale Statului în valoare nominală de 237.500.000 lei, purtătoare de o dobândă de 6% și amortizabile în 44 de ani. Iată cum se ajunge la această cifră:

Pentru preschimbarea acțiunilor primitive în circulație la 1 Ianuarie 1880, în valoare nominală de 243.291.750 lei pe 60% e necesar a se emite obligațiuni de Stat în valoare nominală de		145.975.050 lei
Pentru preschimbarea acțiunilor de prioritate în circulație la 1 Ianuarie 1880 în valoare de 47.884.500 lei pe $133\frac{1}{3}\%$		63.846.000 lei
Premii 2% pentru acțiunile primitive.	4.865.835 lei	
Premii $2\frac{1}{2}\%$ pentru acțiunile de prioritate	1.197.112 lei 50	
Total	6.062.947 lei 50	
său, în obligațiuni de Stat, 6% a 75% în cifre rotunde		8.000.000 lei
Cheltuelile preschimbării		2.678.950 lei
Emisiunea unui împrumut special, tot în obligații de Stat 6%, pentru repararea liniei, îmmulțirea materialului, stingerea unor procese, etc.		20.000.000 lei
Total		240.500.000 lei

Această cifră e cu 3.000.000 lei mai mare decât cea propusă, și diferența provine de acolo că d. Ministru înscrie pentru premii numai 5.000.000 lei, suma nesuficientă în ipoteza conversiunii totale în care sunt făcute calculele din expunerea de motive. Adevărul este că chiar dacă toate acțiunile s'ar prezinta la preschimbare, e puțin probabil ca totalitatea lor să se depună înainte de 1 Martie 1880; celelalte nu mai au drept la premiu.

Se mai zice, chiar în expunerea de motive, că suma de 20.000.000 lei ar trebui considerată ca formând un împrumut separat, destinat a mări venitul căilor ferate prin punerea lor în bună stare. Insă era de datoria acționarilor de a menține liniile în bună stare, și dacă noi am fi astăzi obligați să cheltuim pentru a face ceea ce ar fi trebuit să facă ei, banii aceștia cată să fie socotiți tot împreună cu cei ce am dat sau vom mai da pentru a avea drumuri de fier.

Acum să venim la conversiune și să analizăm chestiunea numai în două supozițiuni: când s'ar preschimba toate acțiunile, ipoteza după care sunt făcute și calculele din anexa lit. D la *expunerea de motive*, și când nu s'ar preschimba decât numai jumătate dintr'însele. Resultatele relative le orice alt caz vor fi cuprinse între cele pe cari le vom obține pentru aceste două cazuri extreme.

IV.

Cazul conversiunii totale.

S'a agitat mult chestiunea dacă conversiunea propusă de D. Ministru de Finanțe este o operațiune avantagioasă sau ba din punctul de vedere curat financiar. Eu găsesc că chestiunea este destul de clară prin sine însăși.

Cari sunt sistemele puse în prezență? După cel dintâi avem de astăzi înainte în timp de 81 de ani se plătim câte 18.857.880 lei pe fiecare an; după cel de al doilea, de astăzi înainte vom plăti pe fiecare an, în timp de 44 de ani, câte o rată care va varia între 17.451.400 și 18.847.870 lei, adică totdeauna mai mică decât cea precedentă. Apoi dacă după un sistem plătim la niște epoce fixe o serie de rate în timp de un număr oarecare de ani, iar după al doilea sistem plătim la aceleași epoce niște rate totdeauna mai mici şi cari se termină înaintea celorlalte, mai poate fi îndoială că sistemul de al doilea e mai avantagios de cât cel dîntâiu?

Cu toate acestea iarăşi nu trebue să ne exagerăm avantajele acestui sistem şi să facem calcule de felul acesta: „Acum o să vedeţi din partea D-lui Ministru de Finanţe nişte calcule cari o să vi se pară curioase. Nu este, zice D. Ministru de Finanţe, mai desavantagios pentru noi dacă vom lua asupra noastră datoria de 285.032.000 decât datoria de 243.291.750 ce garantăm astăzi cu dobânda de 7 ½%. Curios lucru mi se pare acesta. Cum? Este mai avut un om care are o datorie mai mare decât acela care are o datorie mai mică? Să vedem, aşa este?

„Iată calculul ce ne face D. Ministru; D-sa ne zice: ce vă pasă? dacă pentru 285.802.000, daţi în cei dintâi douăzeci de ani o anuitate de 17.611.870, nu vedeţi că în curs de 20 de ani aveţi o economie de 1.246.010 pe an? In al doilea period de 24 de ani o să plătiţi pe fiecare an o anuitate de 17.536.561, ceea ce ne dă pe fiecare an o economie de 1.321.000. Aceste economii adunate la un loc, ne dau o economie de 93.780.000 în termen de 44 de ani, şi mai avem să scăpăm de a plăti încă 37 de ani anuitatea ce plătiţi astăzi.

„Ei bine, de curiozitate am calculat şi eu beneficiul ce se zice că vom avea lângă acela de 93 milioane, neplătind anuitatea pe 37 de ani, şi iată ce am găsit: 18.857.880 × 37 ne dă 791.521.653.

„Prin urmare, după calculul D-lui Ministru, noi avem un beneficiu de 791.521.653. Ei bine, atunci dacă acţionarii ne dau acest beneficiu şi noi le datorăm 285.032.000, atunci să scădem îndată ceea ce avem să dăm din ceea ce avem să luăm, şi atunci ne va reveni nouă mai multe sute de milioane şi vom scăpa atunci de aceşti acţionari. Dar, Domnilor, de unde vine această groaznică eroare a d-lui Ministru? etc., etc." (Discurs pronunţat de D. Pană Buescu în Camera Deputaţilor, şedinţa din 23 Noembrie 1879).

Sunt sigur că D. Buescu, cu acest mod de argumentaţiune, nu a voit decât să facă o glumă, de altminteri foarte spirituală, destinată a pune o notă mai veselă într'un discurs al cărui subiect era prea serios.

Heureux qui, dans ses vers, sait d'une voix légère
Passer du grave au doux, du plaisant au sevère ![36]

D. Buescu, care face parte de atâția ani din Comisiunea Financiară, și pentru care chestiunile economice nu mai au nici un secret, știe tot așa de bine ca și oricine, și încă mai bine decât oricine, că valoarea unui capital atârnă nu numai de numărul bucăților de un leu cari îl compun, ci și de timpul în care cineva poate trage folos dintr'însele. O sumă plătită cuiva astăzi are mai mare valoare pentru dânsul decât o sumă egală ce i s'ar da peste 50 de ani, căci prima sumă îi dă folos în timpul de 50 de ani, în care cea de a doua nu-i dă nimic. D-sa însă, în calculul precedent, nu se preocupă cât de puțin de dobânzile milioanelor pe cari le maniază cu atâta îndemânare, deși cu două rânduri mai jos impută D-lui Ministru tocmai că confundă plata capitalului cu a dobânzii; și apoi nu observă că, chiar așa fiind, cele șapte-sute-nouă-zeci și mai bine de milioane trebue să se scadă, nu din 285 de milioane, ci din 18.857.880×81 adică din 1.527.488.280, căci atâta mai avem să numărăm noi în realitate acționarilor până în ziua scadenței, iar nu 285 de milioane; prin urmare chiar după calculul ultra-optimist al D-lui Buescu, tot ne-ar mai rămânea o sumă destul de rotundă de plătit.

Pentru evaluarea beneficiului realizat prin operațiunea financiară propusă, calea cea mai directă e cea următoare: a considera toți banii ce trebue plătiți până la achitare după fiecare din ambele sisteme, a-i presupune puși în aceleași condițiuni de dobândă, a vedea ce valoare va avea fiecare din aceste sume la un moment oarecare și a compara resultatele; din această comparațiune se va vedea care este beneficiul în condițiunile presupuse.

D-nii Marcovici și Kirilov au urmat metoda următoare: D-lor calculează cât ar trebui să plătim pe an, atât după concesia veche cât și după cea nouă, dacă scadența, atât la una cât și la cealaltă, ar fi de astăzi în 44 de ani; diferența este beneficiul realizat de Stat.

Metoda această în fond revine la cea expusă de mine mai sus; însă aplicațiunea ei are un defect; anume că se presupune că banii plătiți după conversiune produc 6%, pe când, dacă nu s'ar face conversiunea, aceiași bani pot da câte 7½%. Se va zice că acestea sunt dobânzile respective fixate prin concesiune și prin actul de conversiune. Să se observe însă că dobânzile fixate prin aceste acte servesc numai pentru calcularea anuităților;

odată aceste anuităţi calculate, Statul le plăteşte, şi prin urmare se lipseşte de venitul lor, oricare ar fi el; acest venit însă poate varia până la scadenţă; cu alte cuvinte banii ce Statul plăteşte, dacă i-ar fi rămas în casă, ar fi putut să-i producă un folos mai mare sau mai mic decât 6 ori 7½%; aşa că folosul ce banii plătiţi de Stat ar putea să-i producă în realitate, decă i-ar rămânea, este independent de dobânda fixată prin actul în virtutea căruia se plătesc ei.

Pentru mai bună lămurire, să luăm un exemplu: după concesiune, Statul plăteşte pe fiecare an câte 18.857.880 lei, şi această cifră a rezultat din adoptarea cifrei 7½% ca dobândă. Tot asemenea, dacă s'ar face conversiunea, Statul ar trebui să plătească anualmente, să zicem, câte 17.455.450 lei, număr la care s'a ajuns pentru că s'a admis dobânda de 6%. Insemnează însă aceasta că dacă Statul nu ar plăti în anul 1897 cei 18.857.880 lei, ei nu ar putea să-i producă pe anul acela ori mai mult, ori mai puţin decât 7½%? Iar cei 17.455.450 lei nu sunt capabili, în orice împrejurări, a produce decât anume 6%? Evident că nu. Insă este tot atât de evident că banii ce ar rămânea Statului în mână în 1897, fie că ar proveni ei din cei 18.857.880 lei, ori din cei 17.455.450 lei, îi vor produce exact aceleaşi procente, şi aceste procente nu au nimic a face cu cele ce au fost adoptate în 1872 sau în 1880.

D. Kirilov, când face reducerea la aceeaşi scadenţă, se servă pentru anuităţile după concesiune cu cifra 7½ ca procent, iar pentru anuităţile după conversiune cu 6%; ceea ce ar însemna că nişte bani oarecari ar fi în stare să producă un folos de 7½ or de 6%, după cum s'ar numi bani de concesiune sau bani de conversiune. Această distincţiune este cu totul de prisos, ba chiar vătămătoare pentru exactitatea rezultatelor dobândite.

Tot asupra calculului mai am de făcut următoarele observaţii:

D. Marcovici reduce la scadenţă comună de 44 de ani sumele plătite după conversiune; însă nu face aceeaşi reducere şi pentru anuităţile plătite după vechia concesiune; de aceea resultatele la cari ajunge sunt necomplete, căci într'ânsele nu e cuprins beneficiul realizat între 1923 şi 1960, prin economisirea întregii sume de 18.857.880 lei pe an.

D. Kirilov face reducerea omisă de D. Marcovici, însă nu după formula ce trebue. Iacă cum trebue făcută reducțiunea:

După concesiune, noi avem să plătim de azi înainte în timp de n ani anuitatea A pe fiecare an; aceste anuități echivalează cu un capital primitiv C în 1880, care se va afla din formula

$$C(1+r)^n = \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r}$$

Dacă însă acest capital C trebue plătit în n' ani, anuitatea corespunzătoare A′ se va deduce din formula

$$C\,(1+r)^{n'} = \frac{A'[(1+r)^{n'} - 1]}{r}$$

Eliminând pe C către această ecuație și cea precedentă se va obține o formulă care va da pe A′. — Calculul acesta l-am făcut luând

$$A = 18.857.880, \quad n = 81, \quad n' = 44, \quad r = 0{,}075$$

și am găsit

$$A' = 19.618.113 \text{ lei},$$

valoare care diferă foarte considerabil de numărul 20.783.368 dat de D. Kirilov, care s'a servit de formula

$$18.857.880 \times (1{,}075)^{74} = A' \times (1{,}075)^{44}.$$

Pe lângă aceasta, este o nepotrivire chiar între numărul obținut de D. Kirilov și formula D-sale; căci valoarea ce rezultă pentru A′ dintr'însa este 165099800, iar nu 20783368. Pentru a avea acest din urmă număr, ar trebui ca exponentul din membrul întâiu să fie 45,3443, iar nu 74.

Iacă modul de raționament ce am adoptat eu:

După concesiune, care are curs acum, Statul e dator de astăzi înainte în timp de 81 de ani, să plătească câte o sumă A pe fiecare an; el se lipsește dar de folosul ce ar fi putut trage din acești bani. Dacă nu i-ar fi dat acționarilor, el ar fi putut să-i pună, să zicem, la dobândă cu un procent oarecare, p, așa că în anul t să realizeze capitalul Q. Q reprezintă dar valoarea în anul t a banilor de cari s'a lipsit Statul, după concesiune.

După conversiune, Statul are să plătească în timp de 20 ani câte o sumă anuală B pentru obligațiile 6% ale Societății, şi în timp de 44 de ani o sumă C pentru noile obligaţiuni 6 % ale Statului ; dacă aceşti bani i-ar fi rămas, de i-ar fi pus la dobândă tot cu *p*. %, în anul *t* el şi-ar fi format capitalul Q′ ; și Q′ este valoarea în anul *t* a banilor plătiți în virtutea conversiunii.

Dacă Q e mai mare decât Q′, conversiunea e mai avantajoasă decât concesiunea, și diferența Q—Q′ reprezintă valoarea în anul *t* a profitului realizat de Stat dacă va substitui conversiunea în locul concesiunei. Pe urmă e lesne a se cunoaște cu ce economie anuală echivalează acest profit din anul *t*.

Acestea toate fiind stabilite, să trecem la cifre.

Și mai întâi să facem dintr'un condeiu o verificare a calculelor D-lui Ministru.

Pentru plata celor 237.500.000 de obligații 6 %, proiectul guvernului prevede pentru primele 39 semestre o anuitate semestrială care variază puțin în jurul unei valori medii de 7.338.962 lei ; pentru semestrul al 40-lea o anuitate de 8.175.900, pentru cele 47 semestre următoare niște anuități cari diferă puțin de media 8.727.188 lei ; în fine pentru ultimul semestru o anuitate de 8.760.150 lei. Motivul acestei dispozițiuni a fost de a evita ca în primii 20 de ani, când Statul are să plătească și anuitatea obligațiilor 6 % ale Societății, anuitatea totală plătită de Stat să treacă peste cele 18.857.880 lei pe an, ce plătește acum. Astfel fiind, pentru a vedea cu ce capital primitiv echivalează aceste diferite rate, trebue să se rezolve în raport cu C equația :

$$C \times (1{,}03)^{88} = 7.338.962 \times \frac{(1{,}03)^{88} - (1{,}03)^{49}}{0{,}03} + 1.875.900 \times (1{,}03)^{48}$$

$$+ 8.727.188 \times \frac{(1{,}03)^{84} - 1.03}{0{,}03} + 8.760.150$$

ceea ce dă

$$C = 237.496.493,$$

valoare care nu diferă de 237.500.000 decât cu 3507 lei ; și chiar această diferență trebue imputată împrejurării că eu am introdus în calcul anuitățile medii, în loc de anuitățile adevărate.

Formula precedentă e scrisă ținând seama de împrejurarea că capitalul se amortizează din 6 în 6 luni, iar nu din an în an (*Proiectul de convențiune*, art. 16 al. 3) ; de aceea am introdus dobânda de 3% pe semestru; exponenții reprezintă semestre, iar nu ani, ca în formulele obișnuite.

D. Pană Buescu a calculat, — prin logaritmi,, — că anuitatea sumei de 237.500.000 în 44 de ani cu 6% este de 15.438.948 lei; de unde urmează, zice D-lui, că greșit este calculul D-lui Ministru, care începe cu 14 milioane și mai departe merge cu 17 milioane; că tablele D-sale de amortisare sunt vicioase.

Nu e de tăgăduit că un calcul făcut prin logaritmi este ceva ce nici nu se poate pune în discuțiune; pe lângă aceasta chiar eu am refăcut, tot prin logaritmi, calculul D-lui Buescu și am văzut că numărul de 15.438.948 lei este exact până la ultima cifră. Cu toate acestea, să-mi permită D-sa a-i face o mică întrebare, care e foarte naturală din partea unui om ce nu este așa de versat ca D-sa în ale finanțelor: dacă cineva, în loc de a plăti totdeauna câte 15.438.948 lei pe an pentru a achita o datorie, ar plăti când 14 milioane, când 17 milioane, căutând însă a face ca la ziua scadenței aceste plăți să echivaleze cu datoria, ar fi undeva vreun rău? Eu până acum cred că nu; dacă însă D. Buescu îmi va zice că mă înșel și-mi va dovedi aceasta prin logaritmi, eu sunt gata să-mi schimb părerea. Iar dacă D-lui va recunoaște că calculul meu de pe pagina trecută este exact și că tabla de amortizare a D-lui Ministru amortizează în adevăr cele 237½ milioane în 44 de ani, îl rog și eu pe D-lui să cedeze din calculul D-sale. Știu bine că e foarte greu a ceda cineva dintr'un calcul făcut prin logaritmi; însă ce nu e cu putință la cel care are voință, și mai ales bună-voință?

Mai sunt încă câteva lucruri în discursul D-lui Buescu pe cari le-am înțeles într'un chip imperfect; spre exemplu, cum se face că, pe când ținea seamă de creșterea anuității provenită în primii 20 de ani din adoptarea cifrei de 15.438.948, nu ține seamă și de scăderea aceleiași anuități în ultimii 24 de ani? Al doilea, cum conciliează D-lui credința ce are că, după textul concesiunii, noi plătim o dobândă care descrește pe fiecare an cu un amortisment fix de 1 la mie la capitalul primitiv, cu împrejurarea că capitalul se amortizează în 90 de ani, iar nu în 1000, după cum ar trebui, dacă s'ar amortiza pe fiecare an suma fixă de 248.130 lei? In fine pentru ce D-sa, care în toți anii de atâta vreme are a face cu bugetul, nu a ridicat până acum vocea D-sale cea autorizată pentru a chema la răspundere pe Miniștrii cari plăteaupe fiecare an câte 18.857.880 lei, în loc de dobânda descrescândă ce trebuia să fie acum de 18.495.011?

Dacă limitele acestui opuscul și timpul scurt de care dispun până la redeschiderea Corpurilor Legiuitoare mi-ar permite, aş fi mai rugat pe D. Buescu să-mi dea câteva mici lămuriri asupra mai multor altor părți din discursul său. Poate că cu atâtea întrebări m'aş expune să supăr pe D. Buescu și să mă văd şi eu tratat de om care nu ştie aritmetica, cum au pățit-o deja D. Ministru de Finanțe şi un oarecare gazetar; însă eu nu ezit de a înfrunta orice neplăceri când e vorba de a mă instrui.

Dar să revenim la calculul beneficiului realizat prin conversiunea totală, dela care m'am depărtat prea de multă vreme.

După concesiune, noi ar trebui de astăzi înainte să mai plătim în timp de 81 de ani câte 18.857.880 lei pe an. Dacă am presupune că acești bani, în loc de a-i plăti, i-am pune la dobândă cu 6% pe an, ei ne-ar da în 1960 un capital de lei

(a) 34.932.280.808,08

Să ne punem acum în ipoteza conversiunii totale.

După anexa D la expunerea de motive, de la 1880 până la 1898 inclusiv noi vom avea a plăti, pentru obligațiile 6% ce are să emită Statul, pe fiecare an câte o anuitate medie de 14.677.924 lei, iar în 1899 suma de 15.526.900 lei. Acești diferiți bani, dacă ar fi fost dați cu dobândă de 6%, ne-ar fi format, la finele lui 1899, un capital de lei

540.785.024,85

De altă parte noi mai plătim câte 4.167.148 lei pe an între anii 1880 şi 1898 inclusiv, și 3.317.677 lei în 1899 pentru achitarea obligațiilor 6% ale Societății, bani cari ne-ar da în 1899 un capital de lei

152.441.604,55

Acest capital, întrunit cu cel precedent, ar face, la finele lui 1899, lei

693.226.629,40

şi acest din urmă ar deveni, până în 1960, cu câte 6% pe an, lei

(*b*) 24.240.036.727,84.

Vom mai plăti dela 1900 până la 1922 inclusiv câte 17.454.376 în medie pe an, iar în 1923 suma de 17.487.050, tot pentru obligațiile 6% ale Statului. Aceste sume, de ar fi capitalizate până în 1960 cu 6%, ar da lei

(*c*) 7.084.326.480,00

In fine, pe lângă acestea, trebue să mai adăogim 3.000.000 lei cari ar fi necesari până la completarea sumei de 240.500.000, în cazul, puțin probabil, când toate acțiunile s'ar prezenta la schimb înainte de 1 Martie 1880. Acele trei milioane ar deveni în 1960 lei

(*d*) 336.431.550,00

Făcând suma numerelor *b*, *c*, *d*, găsim că în cazul conversiunei totale ar trebui, pentru achitarea datoriei, să plătim niște bani cari în 1960 cu 6% ar valora lei

(*e*) 31.660.794.757,84

Scăzând acest număr din *a*, vedem că conversiunea totală așa cum e propusă ne-ar procura o economie de un capital care în 1960 ar valora lei

(*f*) 3.271.486.050,24

Dacă căutăm care e capitalul care, pus la dobândă în 1880 cu 6% ar da în 1960 suma precedentă, găsim că este lei

29.172.220,00 ;

iar rata anuală care plătită în timp de 81 de ani ar forma în 1960 capitalul (*f*), este lei

1.766.081,00

Prin urmare, dacă s'ar efectua conversiunea tuturor acțiunilor de prioritate și primitive până la 1 Martie 1880, s'ar realiza pentru Stat un beneficiu care ar echivala cu o economie făcută odată pentru totdeauna în 1880 de 29.172.220 lei, sau cu o economie anuală de 1.766.081 lei, făcută în timp de 81 de ani.

V.

Cazul conversiunii pe jumătate.

Dacă nu s'ar preschimba decât jumătate din acțiunile de prioritate și primitive, sarcinele Statului ar fi cele următoare :

Pentru preschimbarea pe 60% a jumătate din acțiunile primitive în valoare nominală de lei 121.645.875 va trebui să se emită obligațiuni de Stat 6% în valoare de lei		72.987.525,00
Pentru preschimbare pe 133 ⅓% a jumătate din acțiunile de prioritate în valoare de lei 23.942.250		31.923.000,00
Premii în numărătoare a 2% pentru acțiunile primitive rescumpărate.	2.432.917.50	
Premii în numărătoare a 2½% pentru acțiunile de prioritate rescumpărate.	598.555,25	
Total în numărătoare	3.031.472,75	
său în obligațiuni 6% ale Statului a 75%, valoare nominală		4.041.963,67
Cheltuelile conversiunii și anume :		
Confecționarea titlurilor lei	220.000,00	
Transportul lor	86.400,00	
Publicațiuni, inserțiuni și cheltueli de preschimbare.	970.600,00	
Cheltueli de depunere la banca imperiului german	15.000,00	
Timbru și cotă la Paris. . .	708.000,00	
Total în numerar	2.000.000,00	
Sau în obligațiuni 6% a 75%		2.500.000,—
Imprumutul pentru repararea liniei și stingerea de procese.		20.000,000,—
Total val. nomin. în cifre rotunde. . . .		131.452.490,—

Emiterea obligațiunilor de 6% se va face dar numai până la concurența sumei de 131. 452. 490 lei.

Pe lângă aceasta. Statul va avea să plătească până la stingere în 1899, anuitățile obligațiunilor 6% ale Societății, cari la 1 Ianuarie 1880 erau încă în circulație pentru valoarea nominală de lei 47.532.000 ; pe urmă un dividend de 3⅓% la acțiunile primitive nepreschimbate şi amortismentul până la stingerea lor în 1960, şi un dividend de 8 % la acțiunile de prioritate nepreschimbate, cu amortismentul lor până în 1943.

Urmând aceeaşi metodă ca şi în cazul precedent, vom vedea că :

Anuitățile plătite până în 1899 inclusiv pentru obligațiunile 6 % ale Statului formează un capital care, cu 6 % pe an, va valora în 1899	299.316.000	lei	—
Valoarea în 1899 pe 6 % a capitalului format de anuitățile obligațiilor 6 % ale Societății este de	152.441.604	lei	55
Suma acestor două numere este . .	451.757.604	lei	55

și acest din urmă capital va deveni până în 1960

(*g*) 15.796.596.144 lei

Anuitățile pentru obligațiile 6 % ale Statului între 1900 și 1923 inclusiv formează un capital a cărui valoare în 1960 va fi de

(*h*) 3.921.061.809 lei

Pentru acțiunile primitive nepreschimbate, trebue plătit pe fiecare an până în 1960 o anuitate de 4.361.138 lei, care să acopere dobânzile de 3 ⅓ % ale capitalului și amortismentul lui pentru 81 de ani.

Aceste anuități capitalizate vor da în 1960

(*i*) 8.078.559.259 lei 25

In fine pentru dobânda 8 % și amortismentul acțiunilor de prioritate nepreschimbate, va trebui să se plătească pe fiecare an până în 1943 câte 1.929.384 lei, și aceste rate capitalizate vor da în 1960

(k) 3.519.553.241 lei

Făcând suma numerelor (*d*), (*h*), (*i*), (*k*), găsim că diferitele plăți făcute în ipoteza conversiunii pe jumătate echivalează cu un capital în 1960 de

31.315.870.453 lei 25.

De altă parte știm că plățile anuale de 18.857.880 lei continuate, după vechia concesiune, până în 1960, echivalează cu un capital în 1960 de

34.932.280.808 lei 08

Economia realizată de Stat în cazul conversiunii pe jumătate este dar reprezentată prin un capital în 1960 de

3.616.410.354 lei 83

Această sumă echivalează cu o economie făcută odată pentru totdeauna la 1880 de

32.247.951 lei 44,

sau cu o rată anuală în timp de 81 de ani de

1.952.286 lei 27.

* * *

Acum cred că e demonstrat că din punctul de vedere curat financiar, conversiunea propusă de Guvern este o operațiune avantagioasă. Urmează însă de aci că ea este pe deplin acceptabilă?

Dacă ar fi posibil a se pune în formule toate articolele noii convențiuni, precum am făcut pentru cele ce se raportau numai la cifre, și dacă din rezoluția unei equațiuni s'ar putea ști câtă sinceritate pun representanții acționarilor în angajamentul ce contractează, poate că aș da un răspuns la această întrebare. Cine însă va putea zice vreodată că cunoaște tot sacul cu expediente ale financiarilor dela Berlin? Cine este în stare să ne asigure că la anul nu vom avea să calculăm pagubele, precum calculăm acum beneficiile? De aceea D-nii Deputați, cari au să judece în ultima instanță, vor trebui să fie cu deosebită luare aminte, mai ales acum când adversarii noștri știu că vor avea Europa cu dânșii ori de câte ori va fi vorba să-și reguleze socotelile cele încurcate, fie chiar cu paguba demnității noastre naționale.