quer immédiatement aux phénomènes sociaux la plupart des propriétés démontrées en Mécanique Rationnelle.

Malheureusement, il n'en est pas tout-à-fait ainsi. D'abord, les causes qui déterminent l'équilibre et le mouvement sont plus nombreuses en Sociologie qu'en Mécanique ; et puis l'étude de la manière d'agir de ces causes est loin d'être aussi avancée en Sociologie qu'en Mécanique. Mais, malgré ces difficultés., la méthode permettra déjà d'établir certains résultats importants.

Nous espérons que le présent travail contribuera dans une certaine mesure à faire avancer la science sociale, par le moyen d'investigation qu'il met à sa disposition, qui permettra d'apporter plus d'ordre et un système mieux défini dans les études à venir, et de dégager plus facilement les lois générales.

Ce premier essai présentera, sans doute, des imperfections ; il y aura, dans tous les cas, des parties susceptibles d'un plus grand développement, et des conclusions qu'on n'aura pas poussées jusqu'à la dernière limite. Mais nous avons cru prudent de ne pas nous risquer trop légèrement sur un terrain nouveau, où il est si facile de tomber dans l'erreur. Si nos premiers pas sont bien assurés, nous espérons bien que ces lacunes du commencement seront faiclement comblées.

L'ouvrage se ressentira aussi des circonstances dans lesquelles il a été écrit, son auteur n'ayant pu avoir ni les loisirs, ni toute la liberté d'esprit necessaires, au milieu des préoccupations et des soucis que lui imposaient les fonctions difficiles qu'il remplissait dans son pays ; mais des circonstances particulières l'ont obligé à se presser plus qu'il n'aurait désiré. D'ailleurs l'ouvrage fait dans ces conditions aura du moins l'avantage d'avoir été forgé dans le milieu même où il a été conçu et qui a fortement contribué à cette conception. En effet, l'idée première de la méthode que nous exposons a été inspirée par le rapprochement que son auteur a maintes fois pu faire entre la manière dont certains phénomènes sociaux se développent, et certaines lois et méthodes scientifiques ; et il était quelquefois en mesure de vérifier ce rapprochement, dont les conséquences pouvaient devenir si fécondes en résultats utiles. Nous nous hâtons d'ajouter que les mécomptes aussi n'ont pas manqué, car il faudra encore beaucoup de temps jusqu'à ce que, si ce n'est tous les phénomènes sociaux, au moins une bonne partie d'entre eux puissent être étudiés d'après la méthode purement scientifique ; mais nous pouvons déjà assurer que si, faute d'une connaissance exacte et complète des données du problème, nous n'avons pu que rarement traiter une question d'après les principes scientifiques, nous avons toujours eu à nous répentir quand, pouvant le faire, nous ne l'avons pas fait. Si nos idées obtiennent la consécration des savants et si d'autres travaux viennent compléter le nôtre, on peut espérer qu'un jour on pourra substituer des méthodes sûres dans la résolution de beaucoup de questions qui aujourd'hui sont trop souvent à la merci de l'inspiration du moment, ou du hasard, ou des passions.

Du reste, on ne doit pas s'imaginer que les principes que nous exposons et les résultats auxquels nous arrivons sont toujours des choses nouvelles. Souvent l'esprit humain a su arriver, par d'autres voies, si non à démontrer rigoureusement, mais du moins à entrevoir, et quelquefois à formuler assez exactement, des principes dont la démonstration scientifique n'est pas facile ; tel le principe de la moindre action ; et la législation des nations civilisées contient souvent des principes dont le mathématicien le plus exigeant aurait lieu d'être satisfait. De même, à la base de nos démonstrations on ne trouvera que des vérités admises par tout le monde, et qu'il sera toujours facile de mettre en évidence, si l'on écarte le léger appareil mathématique dont nous les avons quelquefois entourées, pour les nécessités de la démonstration ou de l'exposition.

* * *

Pour faire une exposition complète de notre objet, nous avons souvent été obligés de rappeler des choses bien connues. Les lecteurs auxquels ces notions seront familières n'en seront pas embarassés ; mais elles étaient nécessaires pour permettre d'exposer la question d'une manière complète.

Quant à la terminologie que nous avons adoptée, elle se ressent naturellement de la méthode même. Mais nous avons cru bien faire de maintenir presque partout des termes qui rappellent les termes analogues de la Mécanique Rationnelle, pour mieux marquer le rapprochement et pour faciliter la comparaison.

* * *

Nous espérons que ce travail, fruit non seulement du raisonnement pur, mais aussi de l'observation et d'une expérience déjà assez longue, répondra en une certaine mesure à une nécessité dont se rendent parfaitement compte ceux qui, dans une sphère plus ou moins étendue, sont appelés a s'occuper des affaires publiques. Il n'y a pas un seul homme d'état digne de ce nom qui ne soit frappé de l'insuffisance des moyens dont on dispose pour résoudre les difficultés qui surgissent à chaque pas dans la vie des peuples. Ces difficultés viennent en premier lieu de la complication même des problèmes qui se posent, du grand nombre des éléments qui les constituent et de l'ignorance presque complète où nous sommes des lois qui, sans aucun doute, régissent les phénomènes sociaux, ainsi qu'il en est pour tous les autres phénomènes naturels. C'est cette ignorance qui est cause que, trop souvent, même les hommes d'état les plus illustres soient réduits à compter plus sur la chance et sur l'imprévu, que sur leur propre science. C'est elle aussi qui fait surgir cette multitude de gens pleins de confiance, qui ont toujours des solutions toutes prêtes pour les problèmes les plus ardus. C'est encore elle qui fait la partie si belle pour ceux qui, par simplicité, par intérêt ou par mauvaise foi, encombrent la vie publique de tant de contrevérités, qui obscurcissent encore, le plus souvent avec intention, des question déjà si obscures par elles-mêmes. Et c'est au milieu de ces difficultés, empêché d'étudier tranquillement les problèmes qu'il est appellé à résoudre, harcelé de tous côtés, en lutte continuelle contre l'erreur et le mensonge, que l'homme d'état est obligé de remplir son devoir si plein de dangereuses responsabilités. Et c'est ainsi que ce que l'on appelle la politique n'est si souvent qu'un tissu d'expédients, de petites finesses, de petites intrigues, de petites infamies, — elles ne sont pas toujours si petites que cela, — au lieu d'être ce qu'elle devrait être : une science très difficile, mais bâtie sur des bases sûres et solides.

Le jour viendra-t-il jamais où cette science sera constituée ? Nous l'espérons et le but du présent travail est de montrer la possibilité d'y parvenir, possibilité que les esprits les plus éminents envisagent déjà avec confiance. Qu'il nous suffise de citer ces lignes, par lesquelles M. Emile Picard exprime cet espoir [1]).

1. Emile Picard, *La mathématique dans ses rapports avec la Physique*. (Dans les Actes du IV congrès international des mathématiciens, tenu à Rome en 1908).

„Pour un avenir plus lointain, on peut prévoir des problèmes plus complexes encore. La Mécanique, nous l'avons rappelé, a longtemps postulé plus ou moins explicitement un principe de non-hérédité. Nous nous accomodons encore de ce principe, au moins en première approximation, dans les sciences de la nature inanimée, quoique de nombreux phénomènes indiquent que l'état actuel garde la trace des états passés; tels ces corps, comme le souffre, qui ont une vitesse de transformation d'une forme en une autre, différente suivant leur histoire antérieure. Mais l'hérédité joue surtout un rôle capital dans les sciences de la vie, et nous ne savons pas si nous pourrons utiliser jamais l'instrument mathématique pour l'étude du mécanisme intime des phénomènes biologiques, et si nous ne devrons pas toujours nous contenter de moyennes grossières et de courbes de fréquences. Il ne faut pas cependant réduire à l'avance notre conception mathématique du monde, et nous pouvons rêver d'équations fonctionnelles plus compliquées que les précédentes, parce qu'elles renfermeront en outre des intégrales prises entre un temps passé très éloigné et le temps actuel, intégrales qui apporteront la part de l'hérédité. Ces equations fonctionnelles réuniront, dans des conditions infiniment complexes, les caractères des deux types simples étudiés avec tant de succès dans ces dernières années, pour lesquels les limites des intégrales sont constantes pour l'un et variables pour l'autre. — Ces espérances sont peut-être chimériques. Sur le terrain mouvant de la vie où figurent un nombre énorme de variables, il se peut qu'il soit impossible de former des équations fonctionnelles, relatives à certains états moyens, devant jouer le même rôle que les équations différentielles de la Physique mathématique actuelle. Mais, si le philosophe peut faire des réserves, il n'y a pour le mathématicien aucun danger à s'abandonner à ces vues audacieuses, qui le poussent à travailler dans une direction certainement féconde. Et, encore une fois, le monde extérieur nous aura guidés dans nos recherches analytiques, nous orientant vers les voies utiles à parcourir".

CHAPITRE I.

Rappel de quelques notions mathematiques ([1])

1. *Variables et fonctions.*

La voyageur qui fait l'ascension d'une montagne remarque tout de suite que plus la hauteur à laquelle il s'élève est grande, plus la hauteur de la colonne de mercure dans le baromètre devient petite.

Dans cette observation, il y a deux quantités qui varient pendant l'ascension; ce sont la hauteur de l'ascension et la longueur de la colonne de mercure. Ces quantités s'appellent *variables*, justement parce que leur valeur n'est pas constante pendant la durée du phénomène observé.

Prenons un autre exemple. Nous avons une source de lumière, une lampe par exemple. Il est facile de remarquer que plus on s'éloigne de la lampe, plus la lumière diminue. Ici encore nous avons deux variables : ce sont la distance et la quantité de lumière.

Dans ces exemples, que l'on peut multiplier à l'infini, on se rend compte tout de suite que les variables qui y figurent ne varient pas d'une manière arbitraire, mais qu'il y a une relation intime entre les variations de l'une et celles de l'autre. Ainsi, il est facile de démontrer expérimentalement que si la distance devient deux fois plus grande, la quantité de lumière envoyée par la lampe sur une même surface plane devient quatre fois plus petite. Cette relation est générale, et on l'exprime par la *loi* suivante : „La quantité de lumière envoyée par une source lumineuse sur une surface plane quelconque est inversement proportionnelle au carré de la distance".

Il en est de même du premier des phénomènes que nous avons cités. Tout le monde sait qu'il existe une relation entre la hauteur de l'ascension et la hauteur du barometre, à tel point qu'un touriste connaît assez exactement la hauteur à laquelle il est parvenu, rien que par la lecture de son baromètre.

1. Ce chapitre a comme seul objet de rendre plus facile la lecture des chapitres suivants pour les personnes peu familiarisées avec les connaissances mathématiques.

On exprime cette relation entre les variables, en disant que l'une d'elles est *fonction* de l'autre. Ainsi nous disons que la quantité de lumière est fonction de la distance ; que la longueur de la colonne barométrique est fonction de la hauteur du point d'observation. La distance et la hauteur s'appellent les *variables indépendantes*, parce que ce sont leurs variations qui determinent celles des fonctions correspondantes.

Du reste, dans chacun des phénoménes cités, rien n'impose le chois de telle ou telle variable comme variable indépendante. Ainsi, nous aurions pu aussi bien considérer la quantité de lumière comme variable indépendante, et calculer la distance d'après cette quantité. Le choix de la variable indépendante sera fait dans chaque cas particulier d'après les convenances du problème.

* * *

Les exemples que nous avons cités sont relativement simples, car dans chacun deux seules variables interveniennent. Mais il existe des phénomènes où le nombre des variables peut être plus grand. Ainsi, dans le premier de nos exemples nous avons supposé que la température est la même tout le long du chemin parcouru par le voyageur. Mais si la température varie, la longueur de la colonne baromètrique varie, non seulement avec la hauteur, mais aussi avec la température. En ce cas la longueur de la colonne este *fonction* de deux *variables indépendantes*. Et rien n'empêche d'admettre l'existence de phénomènes encore plus compliqués, où les nombre des variables indépendantes soit encore plus grand.

* * *

Lorsque la loi d'un phénomène est connue, de manière à pouvoir calculer la valeur de la fonction d'après celle de la variable indépendante, cette loi peut s'exprimer par une *formule* ou *équation*. Ainsi, la loi de la propagation de la lumière s'exprime simplement par l'équation

$$y = \frac{C}{x^2},$$

dans laquelle nous avons représenté par x la distance et par y la quantité de lumière. C est une constante.

Généralement, on écrit

$$y = f(x),$$

pour exprimer que y est fonction de x; et

$$y = f(x, x', x'', x''', \ldots),$$

pour dire que y est fonction des diverses variables x, x', x'', . . .

2. *Détermination des fonctions.*

Lorsque par un moyen quelconque, observation, expérimentation ou raisonnement pur, on parvient à connaître la loi d'une phénomène, on connaît par cela même la forme de la fonction f. C'est ainsi que, dans l'exemple cité plus haut, la forme

$$\frac{C}{x^2}$$

n'est que la traduction de la loi que la quantité de lumière est inversement proportionnelle au carré de la distance.

Considérons le cas le plus simple, celui où le phénomène ne dépend que de deux seules variables, et proposons-nous d'en trouver la loi. Le moyen qui se présente le plus naturellement à l'esprit, est celui de mesurer les valeurs correspondantes des variables x et y par des expériences aussi nombreuses que possible, réalisées dans des circonstances aussi variées que possible et de tâcher ensuite de trouver une formule qui soit satisfaite par tous ces couples de valeurs.

Si, par exemple, nous voulons retrouver la loi de la propagation de la lumière, nous mesurerons la quantité de lumière reçue par une même surface plane à diverses distances; et si nous trouvons que :

à la distance 1 la lumière reçue est 1;

„ 2 „ „ „ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$;

„ 3 „ „ „ $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$;

„ 4 „ „ „ $\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$;

. . . .

nous pouvons tout-de-suite écrire la formule

$$y = \frac{1}{x^2},$$

qui est satisfaite par tous les couples de valeurs que l'expérience avait données.

Mais dans la plupart des cas les choses sont loin de se présenter aussi simplement ; car même si l'on fait abstraction des nombreuses causes accessoires qui peuvent intervenir et masquer la loi du phénomène, il est rare de pouvoir trouver par simple intuition la formule qui résume tous les résultats de l'expérience. En ce cas, on est obligé de se contenter d'une formule qui représente seulement avec approximation les résultats obtenus.

Voici un moyen assez général auquel on peut recourir. Soit

$$y = f(x)$$

la loi qu'il s'ait de formuler, f étant la fonction inconnue dont on doit trouver la forme.

Ou demontre en Calcul Infinitésimal que, dans des cas très étendus, la fonction f peut être développée en une série infinie de termes ordonnés d'après les puissances croissantes de x :

$$y=a+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots$$

Si cette série est convergente, y sera représenté avec une approximation d'autant plus grande qu'on prendra dans la second membre un nombre de termes plus grand. Supposons que nous nous en contentions de quatre, par exemple. Alors nous aurons :

$$y=a+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3.$$

Pour que y soit entièrement défini en fonction de x, il suffira de connaître les valeurs des coefficients a, a_1, a_2, a_3. Pour cela, il suffira de faire quatre expériences, pour trouver quatre couples de valeurs de y et x. Ces valeurs étant substituées successivement dans l'équation, nous donneront quatre équations qui ne contiendront que a, a_1, a_2, a_3, comme inconnues, et qui serviront à les déterminer.

On peut, de cette manière, calculer autant de coefficients qu'on veut, et par conséquent déterminer y avec telle approximation que l'on désire.

Si la série ainsi formée se trouve être de la même forme qu'une série qui représente une fonction connue, y sera cette fonction.

Ce cas arrivera très rarement, et la méthode est assez pénible; mais elle a l'avantage que dans les cas assez nombreux où l'on est obligé de se contenter d'une approximation, on peut pousser cette approximation jusqu'au degré que l'on veut.

Cette méthode pourrait être employée aussi dans le cas où y dépendrait de deux ou plusieurs variables; mais elle devient alors beaucoup plus compliquée.

3. *Représentation de la variation des fonctions par des courbes et des surfaces.*

Lorsqu'une fonction y ne dépend que d'une seule variable x, on peut représenter sa variation par une courbe.

Soit y une fonction donnée par l'équation

$$y = f\ (x).$$

Donnons à x diverses valeurs et calculons les valeurs correspondantes de y. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3\ y_3)$ . . . les couples de valeurs ainsi obtenus.

Nous prenons deux droites rectangulaires, XX' et Y', qui se coupent en O. Nous appellerons ces deux droites *axes des coordonnées*, et le pont O *origine des coordonnées*. Nous conviendrons une fois pour toutes de compter les longueurs positives de O vers X et vers Y, et les longueurs négatives de O vers X,' et vers Y'.

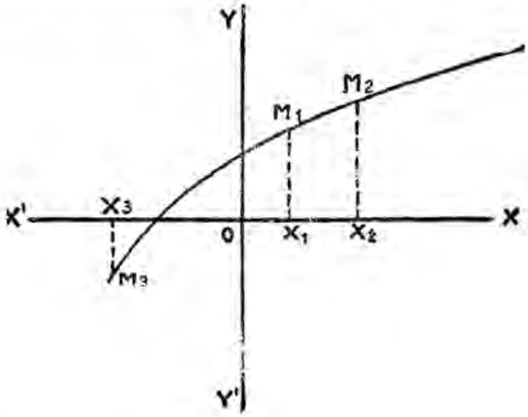

Fig. 1.

Cela posé, prenons sur XX', à partir de O, les longueurs x_1, x_2, x_3, avec leurs signes; et par les points x_1, x_2, x_3, ainsi obtenus sur XX', menons x_1 M_1, x_2 M_2, x_3 M_3, parallèles à YY', égales respectivement à y_1, y_2, y_3 et de même signe. On obtient ainsi les points $M_{.1}$ M_2, M_3.

Il est evident que ces points seront d'autant plus rapprochés l'un de l'autre, que les valeurs données à x auront été elles-mêmes plus rapprochées.

Si on réunit par un trait continu les points M_1 M_2 M_3, on obtient une courbe qui, par sa forme, représente la manière dont x et y varient ensemble.

L'équation

$$y = f(x)$$

s'appelle *l'équation de la courbe*, et il y a un rapport intime entre la forme et les propriétés de la courbe d'une part et les propriétés de l'équation d'autre part.

* * *

Lorsque la forme de la fonction n'est pas connue, on peut essayer de la trouver par des considérations géométriques, si l'on connaît un certain nombre de valeurs de y qui correspondent à des valeurs données de x.

Soient, par exemple,

$$\begin{cases} x = a, & x = a', \quad x = a'', \quad x = a''', \\ y = b, & y = b', \quad y = b'', \quad y = b''', \end{cases}$$

un certain nombre de couples de valeurs. Avec ces valeurs comme coordonnées, nous construisons les points A, B, C, D, que nous réunissons par une courbe continue. Si, par sa forme, elle se rapproche d'une courbe connue, nous pourrons prendre cette courbe comme représentation approximative de la fonction inconnue.

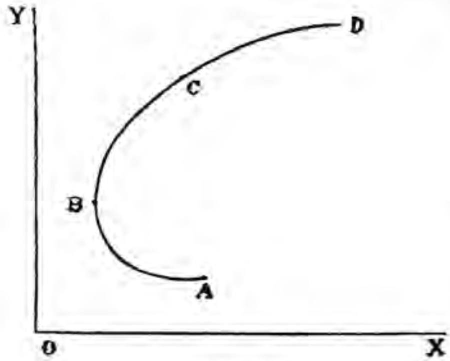

Fig. 2.

Cette méthode ne diffère pas au fond ce celle qui a été exposée au paragraphe précédent.

* * *

On peut, d'une manière analogue, représenter par une surface une fonction z qui dépend de deux variables indépendantes, x et y :

$$z = f(x, y).$$

Pour cela, on prend trois droites, OX, OY et OZ, qui se coupent en O et dont chacune est perpendiculaire au plan des deux autres. On donne des valeurs à x et à y, et on calcule, par l'équation précédente, les valeurs correspondantes de z. Avec les valeurs de x et de y comme coordonnées, on construit le point P dans le plan XOY ; ensuite, on mène de P une paralèle à OZ, d'une longueur égale à la valeur correspondante de z, et l'on trouve ainsi le point M. Si l'on répète cette opération un grand nombre de fois, on aura un grand nombre de points M, qui formeront une surface continue SS'. Cette surface représentera l'équation donnée, et réciproquement.

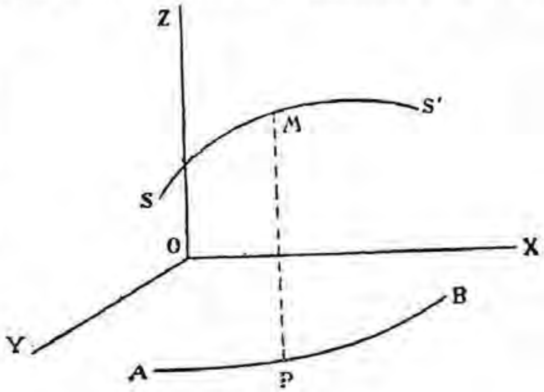

Fig. 3.

Nous conviendrons, ici aussi, de considérer comme positives les longueurs comptées sur OX, OY et OZ dans un certain sens à partir de O, et comme négatives les longueurs comptées, à partir de O, dans le sens opposé, sur le prolongement de OX, OY et OZ.

4. *Interpollation et extrapollation.*

Si un phénomène dépend seulement de deux variables et si l'on connaît sa loi

$$y = f(x),$$

on peut toujours trouver la valeur exacte de l'une de ces variables qui correspond à une valeur donnée de l'autre variable. Mais si la loi n'est pas connue, on est forcé d'avoir recours à des moyens empiriques.

Celui qui est employé le plus souvent consiste en ce que, par expérience ou par observation directe, on forme des tableaux de valeurs de y qui correspondent à des valeurs connues de x. Tels sont les tableaux qui donnent la tension de la vapeur d'eau pour chaque degré de température, la mortalité probable pour chaque âge, et tant d'autres.

Mais ce système a l'inconvenient de ne donner que les couples de valeurs qui figurent dans le tableau et qui nécessairement laissent des vides entre eux. Pour les valeurs qui ne s'y trouvent pas, on est forcé de faire une *interpollation* ou une ex-*extrapollation*, c'est-à-dire d'établir d'une manière approximative la valeur dont a besoin, en partant des valeurs déjà connues.

Il y a plusieurs moyens de faire une interpollation ou une extrapollation. Nous ne rappellerons que la plus simple, qui est en même temps la plus connue et la plus employée.

Soient

$$\begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} x = a'' \\ y = b'' \end{matrix}$$

deux couples de valeurs connues de nos variables ; et soit $x = a'$ une valeur de x comprise entre *a et* a'', pour laquelle on demande les valeur correspondante b' *de* y.

On suppose que dans l'intervalle de a jusqu'à a'' et de b jusqu'à b'' les variations de x sont proportionnelles à celles de y ; et alors on écrit immédiament :

$$\frac{a''-a}{b''-b} = \frac{a''-a}{b''-b},$$

équation qui permet de calculer b'. Nous avons donc *interpollé* b' entre b et b''.

Si l'équation

$$y = f\ (x)$$

était connue et si nous construisions sa courbe CC′, les valeurs $x = a$, $y = b$ et $x = a''$, $y = b''$ détermineraient les points M et M″ sur la courbe. Si l'on nous donne x a' OP′, et que l'on nous demande la valeur correspondante de y, cette valeur est l'ordonnée P′M′ du point M′ de la courbe. Or la méthode d'interpollation exposée ci-dessus revient à dire que entre M et M″ la courbe MM′M″ est remplacée par la droite MM'_1 M″, et la valeur b' que nous avons

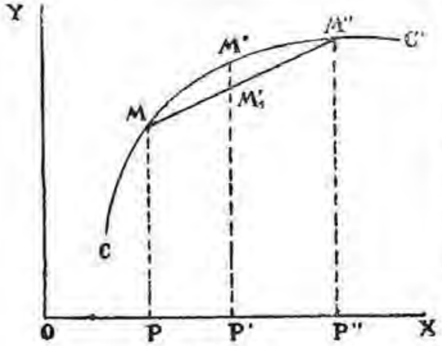

Fig. 4.

trouvée n'est pas l'ordonnéee, P'M' du point M' de la courbe, mais P' M'_1 du point M'_1 de la droite. C'est donc bien une valeur approximative que nous avons trouvée, et l'on voit bien que cette valeur sera d'autant plus exacte que les points M et M'' entre lesquels on a fait l'interpollation sont plus rapprochés.

Supposons maintenant que la valeur cherchée a de x n'est pas comprise entre a et a'', et, pour fixer les idées, admettons qu'elle est plus grande que a''. Si l'on admet encore la proportionnalité des variations de x et de y, nous écrirons encore :

$$\frac{a'-a''}{b'-b''}=\frac{a''-a}{b''-b}$$

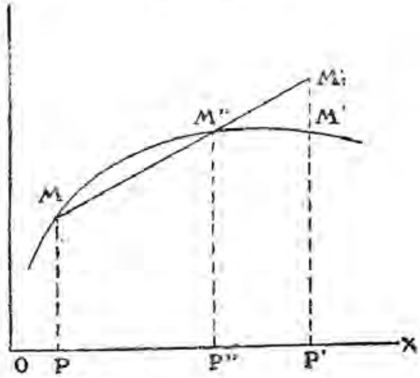

Fig. 5.

d'où l'on tire b'. Cette opération s'appelle une *extrapollation*. En ce cas, on voit par la figure que plus OP' differera de OP'', plus le point M' que le calcul nous donne sera éloigné de M', qui est le point exact. L'extrapollation donc ne peut donner des résultats acceptables qu'à la condition qu'elle soit limitée à un espace aussi restreint que possible dans le voisinage des valeurs connues des variables.

5. *Cercle osculateur.*

Généralement l'étude de la forme et des propriétés d'une courbe est chose assez dificille. Parmi les moyens dont on use pour la simplifier, on a celui de la *courbe osculatrice*. On nomme ainsi une courbe qui, en un point donné, a le contact de l'ordre le plus élevé avec la courbe donnée, c'est-à-dire qui dans le voisinage immédiat de ce point s'écarte le mois de la courbe donnée. On peut alors, avec un degré d'approximation assez élevé, remplacer sur une petite portion la

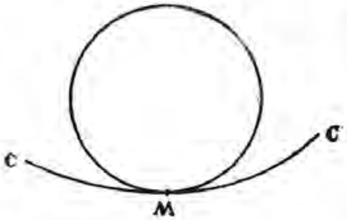

Fig. 6.

courbe donnée par la courbe osculatrice. Comme nous avons le choix de cette courbe, nous n'avons qu'à prendre une courbe très simple et dont les propriétés, soient bien connues.

On choisit généralement, comme courbe osculatrice le cercle, qui est la courbe le mieux connue ; de sorte que, sur une petite distance à droite et à gauche du point M, nous pouvons substituer une portion de ce cercle à la place de la portion correspondante de la courbe CC′, ce qui permet de se rendre compte beaucoup plus facilement de la manière dont se passe en ce point le phénomène représenté par la courbe CC′.

6. *Asymptotes*; *solutions asymptotiques.*

Les courbes se partagent en deux catégories : les courbes finies et les courbes à branches infinies.

Comme exemples de courbes finies, on peut citer la circonférence et l'ellipse; tandis que la parabole, l'hyperbole, et même la ligne droite, sont des exemples de lignes qui s'en vont à l'infini.

Les courbes infinies elles-mêmes sont de deux sortes.

Il y a d'abord celles qui, tout en s'étendant à l'infini, se

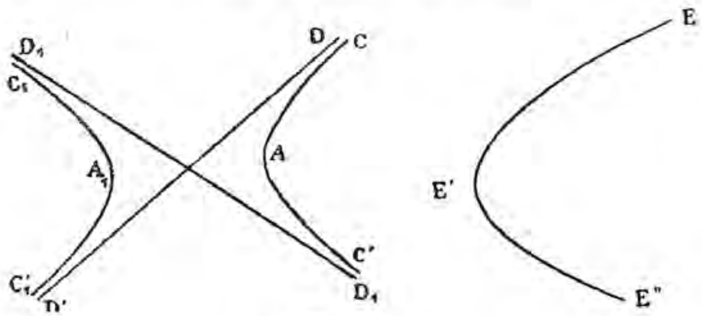

Fig. 7.

rapprochent de plus en plus d'une certaine droite avec laquelle elles tendent à se confondre, sans y parvenir jamais; de sorte que la distance entre la droite et les points de la courbe tend vers zéro quand on s'éloigne à l'infini sur la courbe. La droite qui jouit de cette propriété s'appelle *asymptote* de la courbe. L'hyperbole est un exemple d'une courbe à asymptotes : CAC′

et $C_1A_1C'_1$ étant les deux branches de la courbe, DD′ et D_1 D'_1 sont ses asymptotes.

D'autres fois, il n'existe aucune droite telle que la branche infinie de la courbe s'en rapproche indéfiniment : ces courbes n'ont pas d'asymptote. Telle est la parabole EE′ E″.

Lorsque la loi d'un phénomène est représentée par une courbe à asymptote, on peut, à partir d'un certain moment, remplacer, avec une approximation suffisante, la courbe par son asymptote, dont elle est très rapprochée. Cela revient à dire que l'on remplace la loi du phénomène par une autre, qui n'est qu'approximative, mais qui est beaucoup plus simple ; car, étant représentée par une ligne droite, c'est une simple loi de proportionnalité.

7. *Approximations successives.*

Dans l'étude des phénomènes naturels, aussi bien qu'en mathématiques pures, on a souvent recours à la *méthode des approximations succesives* pour trouver la solution de certains problèmes. Voici en quoi elle consiste :

Supposons, que, par un moyen quelconque, on ait trouvé une loi aproximative, même grossièrement, du phénomène. On se sert de cette loi pour en déduire certaines conséquences, que l'on vérifie par l'expérience. On trouvera, naturellement, un certain désaccord, puisque la loi qui a servi comme point de départ n'était pas exacte. Mais la valeur même de cette différence peut donner la valeur de la correction qu'il faut apporter à la loi primitive. La loi ainsi corrigée servira comme point de départ pour une seconde opération, pareille à la précédente. On peut ainsi, par des approximations successives, se rapprocher autant qu'on veut de la loi exacte. On reconnaîtra qu'on y est arrivé, par le fait qu'il n'y aura plus de différence, ou qu'il y aura seulement une différence négligeable, entre le résultat de l'expérience et celui qui sera donné par loi ainsi corrigée.

CHAPITRE II.

Emploi de la méthode mathématique dans l'étude de quelques phénomènes et problèmes sociaux.

1. *Phénomènes sociaux. Exemple traité par la méthode mathématique.*

Dans chaque phénomène social, on peut distinguer un certain nombre d'éléments variables de telle sorte, que la variation de l'un dépend de la variation de tous les autres.

Prenons comme exemple la mortalité. On se rend compte tout de suite que, dans ce phénomène, *le taux de la mortalité*, c'est-à-dire le nombre de décès annuels pour un nombre donné de vivants, varie en raison de nombreuses circonstances. Ce sont :

1°. L'âge, car la mortalité est plus grande à certains âges qu'à d'autres ;

2°. La vigueur de la race ;

3°. Les conditions climatériques ;

4°. Les conditions hygiéniques ;

5°. La richesse ou la pauvreté du sol, qui assure les moyens d'existence de la population ;

6°. Les causes accidentelles, telles que les épidémies, les guerres, etc.

Et cette énumération est loin d'être complète.

La question devient encore plus compliquée, si l'on considère que la variation des éléments mentionnés ci-dessus peut dépendre, elle aussi, de celle d'autres éléments. Ainsi, il est clair que les conditions hygiéniques d'une population dépendent, entre autres, de son degré de instruction ; car plus elle a d'instruction, mieux elle comprend les avantages de l'hygiène, et mieux elle sait conserver sa santé.

Malgré cette complication, il est évident que les éléments que nous avons cités, ainsi que d'autres que nous avons peut-être omis, sont liés entre eux de telle manière que l'on conçoit la possibilité de trouver la valeur de l'un d'eux si l'on connaissait la valeur de tous les autres. Cela revient à dire que, si l'on représentait par les lettres x, y, z, t, ..., les valeurs des divers éléments qui interviennent dans la question, ces valeurs seraient liées entre elles par une équation telle que

$$F\ (x,\ y,\ z,\ t,\ u,..) = 0,$$

que nous appellerons *l'équation du phénomène*.

En effet, cette équation serait suffisante pour donner la valeur de l'un quelconque, u, des éléments qui y figurent, quand on connaît la valeur de tous les autres ; car, si on la résout par rapport à u, on a :

$$u = f\ (x,\ y,\ z,\ t,\ldots)$$

En rapprochant ce que nous disons ici de ce que nous avons exposé dans la chapitre précédent, on voit que l'étude du phénomène est ramené à une question d'analyse mathématique, dans laquelle u est une fonction des diverses variables $x, y, z, t, \ldots$; et pour avoir la loi du phénomène que nous étudions, il s'agit de trouver la forme de la fonction f.

Nous avons montré ci-dessus comment on peut s'y prendre pour trouver cette forme, à l'aide des résultats donnés par l'expérience et l'observation. Mais cette détermination devient extrêmenmcnt difficile lorsque, comme dans l'exemple dont nous nous occupons, le nombre des variables est un peu grand. En ce cas, on est obligé d'avoir recours aux simplifications et aux méthodes d'approximation que la question comporte.

Dans la question qui nous occupe, nous pouvons appliquer la méthode des approximations succesives. En effet, parmi toutes les causes qui déterminent le taux de la mortalité et que nous avons énumérées, on peut admettre que l'âge est celui dont l'influence est la plus grande. Quant à l'action des autres, elle est moins considérable que celle de l'âge, ou bien simplement accidentelle. Nous la considérerons comme une *perturbation* de l'action principale.

Admettons donc, pour un moment, que l'âge est la seule variable dont dépende le taux de la mortalité, et représentons par x et y ces deux variables. Il s'agit de trouver la forme de l'équation

$$y = f\ (x) \qquad (1)$$

Cette équation une fois trouvée, ne représentera évidement que d'une manière approchée la loi de la mortalité, puisque nous avons négligé tant de circonstances du phénomène. Mais nous pouvons comparer les résultats qu'elle donnera avec ceux de l'observation, en faisant varier succesivement les conditions climatériques, les conditions hygièniques, etc., et apporter à l'équation (1) toutes les corrections nécessaires pour qu'elle représente le phénomène avec toutes ses circonstances.

* * *

Pour trouver l'expression analytique de la loi de mortalité, reduite d'abord à une simple relation entre l'âge x et le taux de la mortalité y, nous nous servirons d'une des nombreuses *tables de mortalité*, établies d'après la statistique des décès aux différents âges. Prenons celle de Déparcieux, dans laquelles nous trouvons les données suivantes :

ÂGE	TAUX DE MORTALITE
1	4,86
14	0,64
36	1.09
58	2,69
70	5,50

Posons

$$y = a + a_1 x + a_2 \ x^2 + a_3 \ x^3 + a^4 x^4. \qquad (2)$$

Si, dans cette équation, nous introduisons successivement les valeurs

$$x = \ 1 \text{ et } y = 4{,}86,$$
$$x = 14 \text{ et } y = 0{,}64,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous formerons cinq équations qui nous donneront les valeurs des cinq coefficients a, a_1, a_2, a_3 et a_4. Par conséquent, la forme de l'équation sera déterminée.

On peut aussi construire les points dont les coordonées sont les nombres compris dans la table de Déparcieux et les

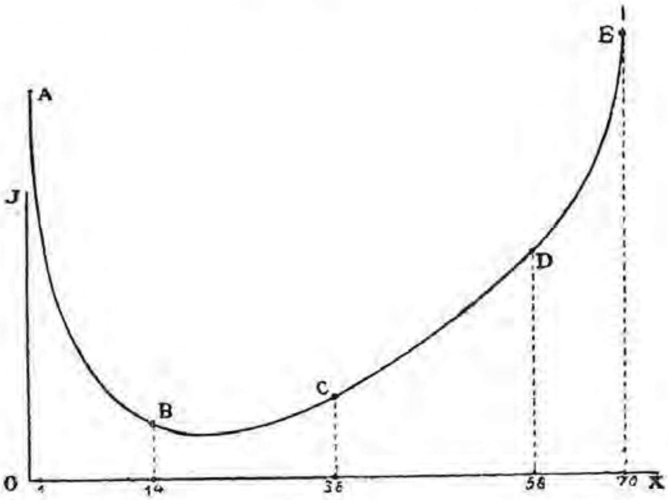

Fig. 8.

réunir par un trait continu. La courbe ainsi formée représentera graphiquement la loi de mortalité.

* * *

La statistique a pour objet d'étudier par l'observation les lois des phénomènes sociaux. Elle forme des tableaux des valeurs correspondantes des variables qui caractérisent chaque phénomène. C'est avec ces valeurs que l'on tâche ensuite de trouver, soit l'équation qui lie les variables entre elles, soit, ce qui revient au même, la courbe dont les points ont comme coordonnées les couples de valeurs donnés par les tableaux statistiques. Ce sont de véritables problèmes de mathématiques qui, une fois résolus, denneront les lois des phénomènes étudiés.

2. *Loi de continuité des phénomènes sociaux.*

L'exemple que nous avons traité dans le paragraphe précédent peut être facilement généralisé, de sorte que nous pouvons admettre que dans tout phénomène social il y a à considérer une ou plusieurs relations entre diverses quantités variables. Ces relations étant connues, la loi du phénomène est connue par cela même. L'étude d'un phénomène social est ainsi ramenée à une étude analytique, dans laquelle l'observation, — et l'expérience dans les cas très rares où elle serait possible, — interviennent pour fournir les données numériques du problème et les moyens pour déterminer la forme des fonctions.

Il suit de là que certaines considérations et certaines propriétés générales des fonctions analytiques peuvent s'appliquer aussi aux phénomènes sociaux. Tel est *le principe de la continuité.*

Soit u une fonction de diverses variables, $x, y, z, t, \ldots$:

$$u = f\,(x, \; y, \; z, \; t, \ldots)$$

On dit que u est *fonction continue* de $x, y, z, t, \ldots$, alors que chacune de ces dernières quantités variant infiniment peu, u varie aussi infiniment peu. Car il est possible aussi que x, y, z, t variant infiniment peu, u varie de quantités infiniment grandes ; il se peut encore qu'il y ait des interruptions dans la série des valeurs réelles de u, correspondantes à des valeurs réelles et continues des variables. Dans ces derniers cas, on dit que u est une *fonction discontinue.*

Voici des exemples.

Soit la fonction

$$y = 1 + 2\,x^2.$$

On peut donner à x toutes les valeurs réelles possibles depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, et pour chaque valeur de x on trouvera une valeur réelle de y ; et si deux valeurs consécutives de x diffèrent infiniment peu, les valeurs correspondantes de y différeront aussi infiniment peu ; y est donc une fonction continue de x.

Soit maintenant

$$y = \frac{1}{x}.$$

Ici encore, x variant insensiblement depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, y varie aussi par degrés insensibles, d'abord depuis zéro jusqu'à l'infini négatif, et puis depuis l'infini positif jusqu'à zéro ; car y prend la valeur $-\infty$ quant x devient nul en venant des valeurs négatives ; et il devient egal à $+\infty$, au moment où x devient nul du côté des valeurs positives. Nous disons donc que y est une fonction discontinue, car elle devient infinie, en passant en même temps brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, au moment où x passe par la valeur zéro.

Soit enfin

$$y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Dans cet exemple, si x varie insensiblement de $-\infty$ jusqu'à -1 et de $+1$ jusqu'à $+\infty$, y varie aussi insensiblement de $+\infty$ jusqu'à zéro ; mais si x à une valeur comprise entre -1 et $+1$, y n'a plus aucune valeur réelle correspondante : elle devient *imaginaire*. Il y a discontinuité ici aussi, parce que les valeurs continues de y subissent une interruption entre celles qui correspondent à $x = -1$ et à $x = +1$.

Les figures suivantes montrent comment les choses se passent dans chacun de ces trois exemples.

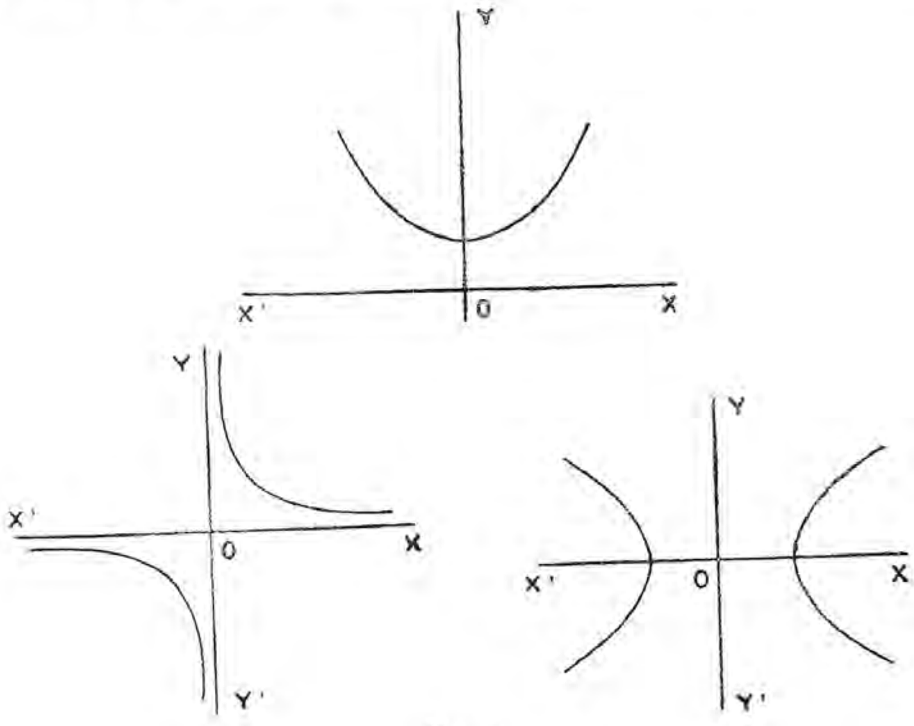

Fig. 9.

Un phénomène quelconque étant representé par une relation entre une fonction et certaines variables dont elle dépend, il sera nommé *continu* tant que la fonction sera continue. Il sera continu aussi lorsque, la fonction étant discontinue, le phénomène est représenté seulement par une partie continue de la fonction. Ainsi, dans les deux derniers exemples, le phénomène s'appelera continu, s'il est représenté seulement par une partie de la branche de droite de la courbe.

Dans tous les autres cas, le phénomène sera *discontinu*.

Cela posé, nous pouvons énoncer la loi suivante :

Tous les phénomènes sociaux sont continus.

C'est par l'observation que l'on établit cette loi très generale.

En effet, c'est un fait d'observation qu'aucune fonction sociale ne prend jamais de valeur infinie entre les limites de l'observation ; cette cause de discontinuité ne se présente donc pas en sociologie. Bien entendu, cela ne veut pas dire que quelques-unes des variables qui figurent dans l'équation qui représente le phénomène ne soient susceptible de prendre dans cette équation des valeurs infinies ; mais ces valeurs ne sont jamais réalisées dans la vie sociale.

D'autre part, c'est encore un fait d'observation que, les conditions d'un phénomène social étant données, les changements d'état du corps social se font par degrés insensibles, et de sorte qu'il ne peut pas passer d'un état à un autre sans passer par tous les états intermédiaires. Cela veut dire que, si la loi du phénomène est représentée par une courbe ou par une partie d'une courbe comprise entre les points A et B, tous les points de la courbe compris entre ces deux points correspondront à des phases successives du phénomène, et qu'il n'y aura jamais d'interruption.

Enfin, dans aucun phénomène social, tant que ses conditions ne changent pas, on n'observe d'arrêt brusque.

Donc les phénomènes sociaux sont continus, tant que les conditions dans lesquelles ils se produisent ne changent pas.

Considérons maintenant le cas où les conditions du phénomène changent. Ce changement peut se produire de deux manières : ou bien d'une manière continue et par degrés insensibles, ou bien d'une manière brusque.

Dans le premier cas, il est évident que le phénomène aussi ne peut varier que d'une manière continue et par degrés insensibles ; car, à un changement infiniment petit de la cause il ne peut correspondre qu'un changement infiniment petit de l'effet. On peut donc dire que la loi de continuité existe aussi dans ce cas.

Il reste à considérer le cas où les conditions du phénomène changent d'une manière brusque. Dans ce cas, on ne peut plus affirmer que la marche du phénomène n'éprouve pas, elle aussi, un changement brusque, et que par conséquent il n'y ait pas de discontinuité. Mais il faut remarquer que, dans ce cas, on a affaire en réalité à deux phénomènes distincts, dont chacun est continu : celui qui précède le changement survenu dans les conditions du phénomène, et celui qui suit ce changement, et qui est distinct du premier, puisqu'il correspond à des conditions différentes.

Du reste on verra plus bas (ch. V, 14) que même en cas de changement brusque dans les conditions d'un phénomène social, le changement du phénomène lui-même n'a pas lieu en général d'une manière brusque, mais qu'il y a presque toujours continuité, même dans ce cas.

* * *

Les exemples qui confirment la loi de continuité ne manquent pas.

Considérons l'institution de l'esclavage. L'origine de cette institution se perd dans la nuit des temps ; masi il est certain qu'elle ne s'est pas trouvée constituée dès le premier jour de l'appartion des sociétés humaines. Il a fallu qu'il y ait eu un premier homme qui, par sa force physique ou par son intelligence, ait réussi à asservir à sa volonté la volonté d'un autre homme. Ce premier exemple s'est propagé de proche en proche, de sorte que, dans la suite des temps, l'esclavage s'est trouvé constitué comme institution sociale ; mais il a fallu une longue suite de siècles pour qu'elle parvînt, graduellement et sans solution de continuité, au développement qu'on lui a vu prendre dans les antiques sociétés orientale, grecque et romaine.

Les conditions sous lesquelles cette institution prit naissance et se développa sont multiples. C'est d'abord le respect du droit de la force, base de toute société primitive, que le temps a transformée et atténuée, sans la faire disparaître entièrement. Ce fut aussi la religion, qui ne fit que donner la consécration divine à ce que le droit de la force avait déjà réalisé. Ce fut encore la condition économique des sociétés, qui les obligea à recourir au travail servile, faute des travailleurs libres qui, dans les sociétés modernes, font vivre l'industrie.

Tant que subsistèrent ces conditions, et d'autres qui étaient propres aux temps lointains que nous considérons, l'esclavage évolua lentement et régulièrement, prenant des formes diverses, suivant les temps, le tempérament plus ou moins violent des peuples, la fréquence plus ou moins grande des guerres. L'esclavage fut un phénomène continu.

Mais de nouveaux facteurs intervinrent, qui changèrent les conditions d'auparavant. Ce fut le christianisme, qui attaqua dans ses fondements la théorie du droit de la force, et qui sapa les bases des religions dont l'esclavage était une des manifestations. Le christianisme changea donc deux des trois conditions que nous avons considérées, et il était naturel que l'institution de l'esclavage, qui en dépendait, en fût aussi atteinte. Mais l'introduction du cristianisme n'eut lieu que graduellement ; car, malgré le décret de Constantin, cette introduction, qui avait déjà commencé depuis près de trois siècles, en demanda encore plusieurs autres pour déraciner d'une manière plus ou moins complète les anciennes croyances religieuses et les conditions sociales qu'elles avaient créées. Nous avons donc ici un exemple pour la seconde partie de notre démonstration, celle où les conditions du phénomène changent graduellement ; et l'histoire nous dit combien lentement l'esclavage diminua, et puis disparut, puisqu'il survécut jusqu'à nos jours, et que ses traces n'ont pas encore complètement disparu.

On pourrait citer ainsi de très nombreux exemples qui démontrent la continuité des phénomènes sociaux, dans les cas où les conditions ne changent pas, ou changent seulement d'une manière continue. On peut dire que la loi de l'évolution n'est qu'un cas particulier de celle de la continuité, de sorte que tous les phénomènes sociaux qui impliquent la première de ces lois sont nécessairement continus.

Les exemples de discontinuité sont beaucoup plus rares. Tel serait le cas d'une population d'agriculteurs, habitant une région fécondée par un grand fleuve, qui, changeant de cours, abandonne la région et la rend stérile. La vie de la population sera altérée d'une manière profonde ; car il faudra qu'elle émigre, ou bien qu'elle change complètement de genre de vie. Il y aura donc discontinuité dans la vie de cette population, produite au moment du changement du cours du fleuve ; mais il y a eu continuité avant, et il y en aura aussi après. Ce sont deux phénomènes distincts, car leurs conditions sont différentes ; le premier se passait dans une région fertile, le second dans un désert ; mais chacun d'eux est continu.

La continuité est donc une loi trés générale, et elle s'impose à l'esprit de quiconque suit avec attention le mouvement des évènements historiques et sociaux. Les hommes d'état qui ont exercé une action durable sur la marche de l'humanité en ont été pénétrés, même si la loi ne se présentait pas à leur esprit d'une manière très précise. Par contre, elle est aussi trop souvent méconnue, ce qui n'est pas la moindre des causes qui retardent et embarassent le developpement normal des sociétés.

* * *

Supposons qu'un phénomène social soit représenté par une équation entre deux variables, ou par deux équations entre trois variables. Ces équations peuvent être représentées par une courbe plane dans le premier cas, et généralement par une courbe gauche dans le second.

La loi de continuité signifie que cette courbe ou la partie de certe courbe qui représente le phénomène, et que nous appellerons *la partie utile* de la courbe, est continue, en ce sens qu'elle n'est pas formée de deux ou plusieurs branches séparées les unes des autres, et qu'elle ne présente pas de point isolé, ni de point d'arrêt, ni de point anguleux, c'est-à-dire de point où deux branches de la même courbe se rencontrent avec des tangentes distinctes, comme dans la figure ci-jointe.

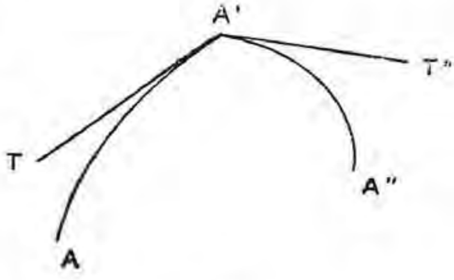

Fig. 10.

Si à un certain moment les conditions du phénomène changent, mais si elles changent d'une manière continue, le phénomène est représenté, dans ses deux parties, par deux courbes distinctes ; mais le passage d'une courbe à l'autre doit se faire d'une manière continue, ce qui signifie géométriquement

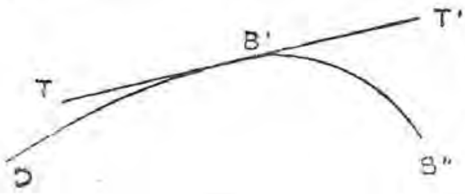

Fig. 11.

que les deux courbes ont la même tangente à leur point de rencontre, ou qu'*elles se raccordent*. Telles sont les courbes BB′ et B′ B″, qui à leur point de rencontre B′ ont la même tangente TB′T′.

Si les conditions du phénomène changent d'une manière brusque, les deux parties du phénomène, celle qui précède et celle qui suit le changement, sont représentées par deux courbes, DC et CE, qui ne se raccordent pas entre elles. En ce cas, si l'on a la possibilité de diriger la marche de l'évènement, on peut ménager la transition, en introduisant des conditions nouvelles telles, que entre les points D′ et E′ le phénomène, au lieu de suivre la ligne brisée D′CE′, suive la courbe D′E′, qui se raccorde en D′ avec DC et en E′ avec EC. De cette manière ou peut faire disparaître la discontinuité qui avait lieu en C, et le phénomène devient continu.

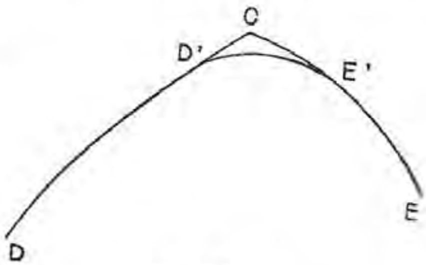

Fig. 12.

CHAPITRE III.

Mode de représentation des phénomènes sociaux.

1. *Mode de représentation en Mécanique Rationnelle.*

Les corps matériels sont considérés, en Mécanique Rationnelle, comme formés de *points matériels*, c'est-à-dire de particules matérielles infiniment petites.

Un point matériel est *en repos* tant que ses distances à trois points fixes sont invariables. Si ces distances changent d'un moment à un autre, on dit que le point matériel donné est *en mouvement*.

On peut aussi se rendre compte de l'état de repos ou de mouvement d'un point matériel, en le rapportant à un système d'axes coordonnés fixes dans l'espace. Si le point M est en repos, ses coordonnées x, y, z sont constantes ; s'il est en mouvement, ces coordonnées varient.

On appelle *force* toute cause qui met un point en mouvement ,ou qui modifie le mouvement que ce point possède déjà.

Pour qu'une force soit définie, il faut connaître : 1° son *point d'application*, c'est-à-dire le point matériel dont elle détermine le mouvement ; 2° sa *direction*, c'est-à-dire la ligne droite le long de laquelle elle ferait glisser son point d'application, si elle agissait seule sur lui ; 3° son *sens*, car on conçoit qu'une force peut faire avancer son point d'application, par exemple, de droite à gauche, ou de gauche à droite ; 4° son *intensité*.

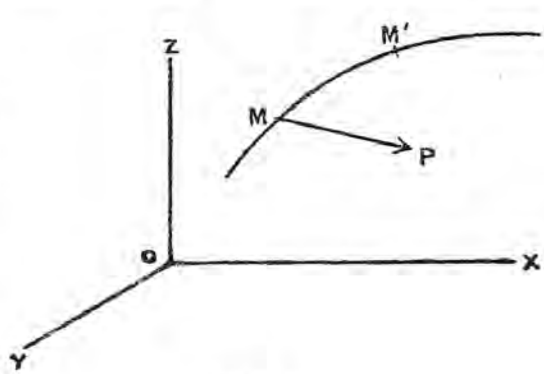

Fig. 13.

Si tous ces éléments sont donnés, la force est parfaitement determinée, et elle peut être représentée par une droite MP, qui passe par le point d'application M, qui a la direction de la force, qui est dirigée dans le sens de son action indiqué par une flèche, et dont la longueur est proportionnelle à l'intensité de cette force. Une droite comme MP, qui est déterminée quant à sa direction, à son sens et à sa longueur, s'appelle un *vecteur*. Toute force peut être donc représentée par un vecteur.

On dit que deux forces ont des inténsités égales, lorsque, appliquées successivement à un même point matériel, dans des conditions identiques et agissant pendant des temps égaux, elles impriment à ce point des mouvements identiques.

Si deux forces d'intensités égales sont appliquées à un même point en même temps, sur la même ligne droite et dans le même sens, on conçoit que ces forces peuvent être remplacées par une force unique qui, agissant sur cette même ligne droite et dans le même sens, produise le même effet que les deux forces données agissant ensemble; on dit que cette dernière force est deux fois plus grande que chacune des forces primitives. On peut définir, de même, une force trois, quatre..... fois plus grande qu'une autre; et par généralisation on peut définir aussi deux forces qui sont entre elles dans un rapport quelconque, commensurable ou non.

* * *

On appelle *systéme matériel* une réunion de points matériels, en nombre fini on infiniment grand, qui exercent les uns sur les autres certaines actions.

Ces actions peuvent être de simples forces; tel est le cas des corps célestes qui constituent le *système solaire*, et qui ne sont soumis qu'à la force de l'attraction universelle s'exerçant entre eux.

D'autres fois, ces actions peuvent se traduire par certaines conditions que les positions des points matériels doivent remplir. Ainsi deux boules, liées entre elles par une barre rigide et inextensible, forment un système matériel. Cette *liaison*, qui dans cet exemple est réalisée d'un manière matérielle par l'introduction de la barre rigide, peut aussi être remplacée par une équation, qui exprime que la distance des centres des deux boules est constante. Dans les deux cas, il serait possible de remplacer, soit la barre rigide, soit l'équation qui exprime l'invariabilité de la distance, par une force choisie de telle manière, qu'elle annule à chaque instant la tendance que les deux boules auraient de se rapprocher ou de s'éloigner l'une de l'autre. Cette force sera nommée *force de liaison*, car elle remplace une liaison.

Si les liaisons imposées à un système matériel sont telles que toutes les distances réciproques des points matériels qui composent le système restent invarbles, le système matérie l s'appelle *solide* ou *invariable*.

2. *Mode de représentation en Sociologie.*

On peut employer, dans l'étude des questions sociales, un mode de représentation analogue à celui que nous venons d'exposer.

Nous appellerons *société* ou *corps social* une réunion d'individus soumis d'un côté à leurs actions réciproques, et d'autre part à des actions extérieures.

L'individu est *l'élément* constitutif du corps social, car il est indivisible. Il joue, pour le corps social, le même rôle que l'atome pour un corps matériel.

Une société est essentiellement variable, non seulement parce que ses éléments changent continuellement, mais aussi parce que la situation respective, ainsi que les rapports de ces éléments entre eux changent, de même que les actions que cette société subit par suite des causes extérieures.

On pourrait se faire une idée de ces variations, si l'on disposait de certains termes fixes de comparaison. Mais pour trouver de pareils termes, il faut d'abord distinguer les variables dont l'état d'une société dépend à un moment quelconque.

Ces variables sont en très grand nombre. Il suffit de songer aux innombrables causes qui contribuent à la formation et au développement d'une société, pour voir à quel point le problème est compliqué.

Cependant, si l'on examine ces causes, on voit qu'elles peuvent être rangées en trois groupes, qui sont : les causes de nature *économique*, celles de nature *intellectuelle*, celles de nature *morale*.

Sans songer à faire une énumération complète, qui serait impossible, et pour le moment inutile, on peut donner quelques exemples pour chacun de ces trois groupes.

Le degré de fertilité du sol, les conditions du climat, la facilité des communications, les richesses naturelles du pays, les aptitudes de la population pour le commerce ou pour l'industrie, sa vigueur physique, la sécurité des relations, certaines prescriptions religieuses, telles que celles qui règlent le régime alimentaire et les jours de chômage, les conditions plus ou moins normales du développement du capital, la nature des relations existantes entre les facteurs qui règlent le travail, la repartition de la richesse à un moment donné, les guerres, les épidémies, l'alcoolisme, les nouvelles inventions, toutes les causes qui influent sur la multiplication de la population, voilà, parmi tant d'autres, autant de causes qui concourent à déterminer l'état économique d'une société.

Parmi les causes de nature intellectuelle, nous avons le degré d'intelligence et la nature des aptitudes intellectuelles de la population, son degré d'instruction, le nombre et la valeur de ses institutions de culture, le développement des sciences et des arts, la fréquence de l'apparition d'hommes de génie ou de talent.

Les causes morales comprennent : les prescriptions de nature morale de la religion, les principes de la legislation civile, l'institution de la famille et son mode de constitution, le degré de douceur ou de violence naturelles du tempérament de la nation, ses moeurs plus on moins pures.

* * *

Une première observation que cette citation d'exemples suggère, c'est que, pour abréger le discours, nous avons été obligé plusieurs fois de nous servir d'une expression impropre. Ainsi, quand nous disons que l'institution de la famille et son mode de constitution est une des causes qui déterminent l'état d'un corps social, nous n'avons pas exprimé toute notre pensée ; car, si la constitution *actuelle* de la famille est une de ces causes *immédiates*, pour étudier le problème dans toute sa généralité il nous faudrait remonter aux causes originaires qui ont conduit, à travers les siècles, à la constitution actuelle de la famille. Pour employer le langage mathématique, nous dirons que l'état social est fonction de l'état de la famille, qui est lui-même fonction des causes qui l'on déterminé ; autrement dit, l'état social est fonction de fonction de ces dernières causes.

De même, ce n'est pas la legislation qui imprime le caractère propre d'un société, mais bien l'ensemble des causes qui graduellement ont produit cette legislation ; car celle-ci n'en est que le résumé et la représentation actuelle.

Cependant, pour l'objet que nous avons en vue, il sera possible très souvent de nous contenter de considérer seulement les causes les plus rapprochées ; et pour justifier tout de suite cette manière de voir, nous dirons qu'on ne procède pas autrement dans les sciences. Ainsi, lorsque, en Mécanique Céleste, on traite le mouvement des astres, on considère la force de l'attraction universelle, sans se préoccuper des causes auxquelles cette force serait due. Cependant, il est évident que cette étude ne sera complète que le jour où elle pourra remonter jusque là.

Du reste, le progrès continuel des sciences tend à réduire sans cesse le nombre des causes considérées comme primordiales. C'est ainsi que le mouvement des corps célestes, après avoir été mis sur le compte de la volonté divine, ensuite sur celui des tourbillons, est aujourd'hui expliqué par l'attraction universelle, en attendat que l'on découvre la cause de cette même attracti n. Il est sûr que le jour où l'existence de l'éther aura été mise tout-à-fait hors de discussion et où l'on en connaîtra les propriétés, bon nombre des causes que l'on considère aujourd'hui comme causes premières trouveront leur explication et cesseront de l'être.

En Sociologie on est d'autant plus autorisé à procéder comme dans les autres sciences d'observation que, sans parler de la complication extrême d'une étude qui remonterait aux causes éloignées, nous sommes forcés de nous contenter, pour longtemps encore, d'une approximation beaucoup plus grossière que dans les sciences exactes. Les lois sur lesquelles s'appuient les théories des sciences sont en général des lois précises, que l'on peut facilement exprimer par des formules simples ; telle . de l'attraction universelle ; tandis qu'en Sociologie, il faudra encore de longues années d'étude et d'observation, avant d'arriver à dégager certaines lois générales. En attendant, nous serons obligés de nous contenter d'introduire dans nos études et dans les équations que nous réussirons à établir seulement des lois empiriques, qui par là même seront forcément de lois approximatives. Il s'agira seulement de pousser cette approximation aussi loin que possible.

* * *

Une seconde observation que nous devons faire sur la classification que nous avons établie ci-dessus, c'est qu'elle n'est pas absolue, en ce sens que certaines causes rangées dans une des trois classes peuvent subir l'influence de causes qui font partie d'une autre classe. Ainsi, les nouvelles inventions sont bien une des causes les plus énergiques de l'évolution économique sociale ; mais il est évident qu'elles sont en relation directe avec l'état de développement intelectuel du corps social.

Cela veut dire que ces deux variables ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Pour nous rendre compte de la manière dont elles sont liées entre elles, il nous faudrait remonter à la variable dont elles dépendent toutes des deux, c'est-à-dire à l'intelligence, et établir son mode de production et d'action. Malheureusement nous sommes encore loin de posséder cette connaissance, et c'est à peine si nous connaissons, souvent d'une façon très incomplète, les manifestations de cette intelligence. Cela étant, nous nous contenterons, en première approximation, ainsi que nous venons de le faire dans l'observation précédente, de considérer comme indépendantes les unes des autres les trois groupes de causes qui agissent sur le corps social.

* * *

Pour mieux faire saisir le sens et la portée de ces considérations, nous croyons utile de mettre en regard de ce que nous venons de dire un exemple pris dans une science admirable par la précision de ses résultats.

Considérons le soleil S et deux planètes, A et B. L'attraction newtonienne s'exerce entre S et A, entre S et B. Mais elle s'exerce aussi entre A et B. Seulement, comme la masse des planètes est beaucoup plus petite que celle du soleil, il est clair que l'attraction que chacune des planètes A et B subit de la part du soleil est beaucoup plus grande que celle que cette planète subit de la part de l'autre planète.

Si la planète A était soumise à la seule attraction du soleil S, elle décrirait une ellipse, d'après certaines lois bien connues, sous le nom de *lois de Kepler*. Mais l'attraction de B vient *troubler* ce mouvement, et y produire ce que l'on appelle des *perturbations* ; c'est-à-dire que A, au lieu de décrire une ellipse exacte autour de S, décrit une courbe qui ne fait que se rapprocher d'une ellipse. Et il en est de même pour B.

Pour calculer ces perturbations pour A, on coupe la difficulté en deux : on suppose d'abord que B continue son mouvement elliptique comme si A n'existait pas, et on calcule la perturbation produite par B dans cette hypothèse ; c'est la *pertur-*

bation du premier ordre. Mais cette hypothèse n'est pas exacte, du moment que B, troublé par A, ne suit pas exactement une ellipse. Alors on corrige le premier résultat, en faisant un second calcul, dans lequel on tient compte aussi du fait que B, au lieu de suivre une ellipse exacte, suit une courbe déterminée par l'action perturbatrice de A. C'est la *perturbation du second ordre.*

Il est remarquable que, dans le système solaire, à cause de la grandeur de la masse du soleil, les diverses perturbations dont nous avons parlé suivent un ordre de décroissance très rapide. Ainsi, la perturbation du premier ordre est beaucoup moins considérable que l'action que le soleil exerce directement sur la planète ; et la perturbation du second ordre est aussi très petite par rapport à celle du premier ordre.

On voit que la méthode suivie par nous dans ce que nous avons dit ci-dessus revient à celle qui sert en Mécanique Céleste : nous tenons compte, en première ligne, de l'action exercée sur le corps social par les diverses causes qui agissent sur lui, en négligeant d'abord celles que ces causes exercent les unes sur les autres ; c'est la première approximation ; et nous réservons pour une étude à faire ultérieurement celle dans laquelle on tiendra compte aussi des actions que ces causes exercent entre elles ; ce sera la seconde approximation. Cette seconde étude ne viendra probablement qu'assez tard, vu la grande difficulté que présentera déjà la première.

* * *

Tout cela étant posé, considérons séparément le groupe des causes de nature économique, et supposons que ces causes agissent simultanément sur un individu donné. Elles produiront sur cet individu un certain changement d'état social, qui peut être plus ou moins considérable ; et l'on conçoit que l'on peut comparer entre eux les effets que des causes différentes produiraient sur le même individu dans des temps égaux. Il serait donc possible de mesurer l'intensité d'une de ces causes, en cherchant le rapport de l'effet produit par elle à celui produit par une quelconque de ces causes, prise comme terme de comparaison.

Il en serait de même si nous considérions séparément les causes de nature intellectuelle et celles de nature morale.

Il est vrai que la réalisation de cette mesure est une chose qui est plus facile à concevoir qu'à effectuer, car il est très difficile d'établir des critériums d'aprés lesquels de pareilles mesures pourraient être faites. -L'état intellectuel d'un individu, par exemple, ne peut pas être jugé seulement d'après son degré d'instruction; il y a bien d'autres choses encore dont il faut tenir compte. Il n'en est pas moins vrai que la représentation de l'in- tensité de ces actions comme celle de grandeurs bien déterminées se présente à l'esprit comme une chose parfaitement rationnelle, malgré les difficultés auxquelles sa réalisation pourrait donner lieu.

D'autre part, deux individus quelconques étant donnés, on comprend que l'on peut établir une comparaison entre leurs états économiques, même si par ce mot on entendait non seulement leur état de richesse ou de pauvreté, mais l'ensemble des conditions qui déterminent le bien-être physique et matériel de chacun d'eux. On peut donc concevoir comme une grandeur déterminée ce que nous pourrions appeler *l'avoir économique* d'un individu. Et il en est de même de son état intellectuel et de son état moral.

Nous appellerons *état social* ou *situation sociale* d'un individu l'état défini par l'ensemble des trois grandeurs qui représenteront son avoir économique, son avoir intellectuel et son avoir moral.

Cela étant, convenons une fois pour toutes de représenter respectivement par x, y et z les grandeurs qui représenteraient l'avoir économique, l'avoir intellectuel et l'avoir moral d'un individu.

Prenons trois axes rectangulaires, OX, OY et OZ, et construisons le point M dont les coordonnées sont les valeurs x, y, z relatives à un individu donné et à un moment donné, telles qu'elles ont été définies ci-desus. Si la position de ce point par rapport aux axes OX, OY, OZ est connue, nous connaîtrons par cela même la situation sociale de l'individu, car nous connaîtrons les valeurs x, y, z, qui caractérisent cette situation.

Les trois axes OX, OY, OZ définissent un espace que nous appelerons *l'espace social*. Si l'on donne les coordonnées x, y, z d'un individu, on définit par là sa position dans l'espace social.

Il importe, pour éviter les confusions, que la situation et le sens des axes coordonnés soient parfaitement définis.

Nous conviendrons de prendre comme sens positif des axes OX, OY, OZ celui dans lequel l'avoir économique, intellectuel et moral de l'individu va en augmentant.

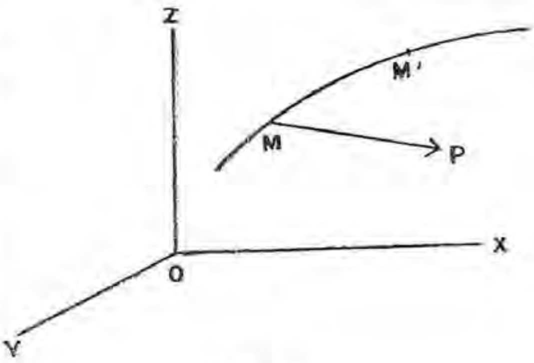

Fig. 14.

Nous prendrons comme origine des coordonnées le point pour lequel l'avoir économique, intellectuel et moral serait nul.

* * *

L'état social d'un individu est généralement variable, par suite de la variation des circonstances qui peuvent avoir une certaine influence sur cet état. Par conséquent le point qui représente cet état varie aussi, et cette variation est continue, puisque les phénomènes sociaux sont continus. Donc la suite des positions que ce point occupera dans l'espace social formera une courbe continue. Nous l'appellerons *la trajectoire* ou la *courbe sociale* de l'individu. Si cette courbe est connue entre deux points, on aura la représentation de la *vie sociale* de l'individu entre ces deux points, et réciproquement.

Un individu sera *en repos social* tant que les coordonnées du point qui représente son état social ne changent pas ; il est *en mouvement social*, si ces coordonnées changent.

Nous appellerons *force sociale* toute cause qui peut produire un mouvement social, ou modifier un mouvement déjà existant.

Toute force sociale peut être représentée par un vecteur MP dans l'espace social ; car il est facile de voir qu'elle réunit tous les éléments nécessaires pour définir un vecteur. En effet, ce vecteur aura comme point d'application le point M qui représente l'état social actuel de l'individu auquel la force sociale est appliquée ; il aura comme direction et comme sens, la direction et le sens dans lequel la force tendrait à déplacer son point d'application, si ce point était en repos et exempt de toute autre cause de mouvement. Il est evident que cette direction sera parallèle à l'axe OX, si la force considérée ne tend à faire varier que l'état économique de l'individu ; elle sera parallèle à OY ou à OZ, si elle fait varier seulement l'état intellectuel ou seulement l'état moral de l'individu ; et elle sera plus ou moins inclinée sur chacun de ces axes, dans le cas où elle ferait varier en même temps deux ou trois de ces états.

Enfin le vecteur sera représenté comme grandeur par une longueur proportionnelle à l'intensité avec laquelle la force sociale agit sur l'individu.

3. *Observation sur les considérations précédentes.*

Le mode que nous venons d'exposer pour la représentation du mouvement social et l'introduction de la notion de l'espace social ont une importance particulière qui nous oblige à nous y arrêter encore.

La représentation que nous proposons peut être utile, rien que par le fait de rendre pour ainsi dire sensibles à l'oeil certains phénomènes dont l'étude est rendue encore plus difficile par le vague où ils flottent.

Il ne faut pourtant pas perdre de vue que l'emploi des trois coordonnées que nous avons choisies ne sera qu'une première étape. Ainsi que nous l'avons déjà dit, on devrait choisir comme coordonnée les variables indépendantes dont les phénomènes sociaux dépendent. Cela ne pourra pas être fait avant que l'étude des forces sociales soit asesz avancée pour permettre de distinguer quelles sont les variables sociales qui sont entièrement indépendantes. Ces variables une fois connues, on representera leurs valeurs par des longueurs portées sur autant d'axes coordonées.

Le nombre de ces variables pourra être de une, de deux, ou de trois ; mais il pourra aussi être plus grand que trois. En ce cas, l'espace social sera un espace à plus de trois dimensions, ou un *hyperespace*. Une représentation géométrique de cet espace ne sera plus possible, et les propriétés, ainsi que les formules de l'équilibre et du mouvement social que nous établirons plus loin, devront être généralisées pour cet espace à plus de trois dimensions.

En attendant, nos formules et nos propriétés ne seront vraies que jusqu'à la première approximation, celle où nous négligeons les variations des phénomènes sociaux provenant de l'action des forces de chacun des groupes économique, intellectuel et moral, les unes sur les autres.

* * *

Dans ce qui suit, nous serons obligés de chercher quelques exemples pris dans la vie des sociétés, soit pour vérifier un résultat établi par simple raisonnement, soit pour aider le raisonnement par des faits observés. Le choix de ces exemples sera assez malaisé. En effet, si on les prend dans les sociétés les plus civilisées, qui sont aussi les mieux connues, comme la vie de ces sociétés est extrêmement compliquée, il est très difficile de distinguer les effets produits par des causes souvent très diverses. Si d'autre part on s'adresse aux sociétés primitives, dont la vie est si simple et où la relation des causes et des effets est relativement facile à démêler, ces sociétés présentent généralement l'inconvénient d'être assez mal connues. Dans tous les cas, nous éviterons autant que possible d'avoir recours aux exemples contemporains : avec eux, on risque trop de devenir moins objectif ; et d'ailleurs, on a trop peu de recul pour les juger avec toute l'ampleur que le sujet exige.

CHAPITRE IV.

Statique sociale.

1. *Equilibre, composition et résultante des forces sociales.*

Considérons un certain nombre de forces sociales, P, appliquées à un individu, ou à une société composée d'un certain nombre d'individus. On dit que ces forces se font *équilibre*, lorsque par leur suppression on ne change en rien l'état de repos ou de mouvement social que l'individu, ou la société, possédait avant cette suppression.

On voit par cette définition que l'état d'équilibre d'un système de forces sociales n'implique nullement l'état de repos social de l'individu ou de la société auxquels il est appliqué.

Il peut arriver que, un système quelconque de forces sociales P étant donné, il soit possible de trouver une force unique R′ qui, ajoutée aux forces données, leur fasse équilibre. Si l'on considère une force R, égale et directement opposée à R′, cette force R est aussi capable de faire équilibre à R′. Par conséquent, l'action de la force R est équivalente à celle du système des forces, P, puisque, l'une aussi bien que l'autre est capable d'équilibrer la force R′. On dit alors que la force R est la *resultante* des forces P, et ces dernières sont les *composantes* de R.

On voit, par cette définition même, que lorsque plusieurs forces se font équilibre, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

* * *

On démontre en Mécanique Rationnelle les propositions suivantes :

1°. Lorsque un certain nombre de forces agissent sur un point matériel suivant la même ligne droite, et si l'on considère comme positives les forces qui tirent dans un sens et comme négatives celles qui tirent dans le sens opposé, ces forces ont toujours une résultante qui agit suivante la même ligne droite et dont la valeur est égale à la somme algébrique de ses composantes. Si cette somme est nulle, les forces données se font équilibre.

2°. Si deux forces P et P′ agissent sur un même point matériel M dans des directions différentes, elles ont toujours une résultante, qui est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale MR du parallélogramme construit sur les forces P et P′.

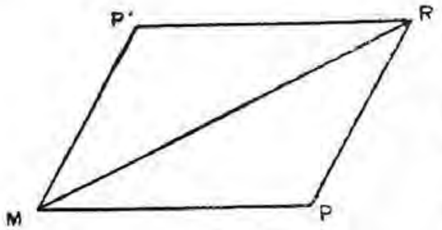

Fig. 15.

3°. Lorque un système de plusieurs forces concourantes, P, P′, PP″... agit sur un même point matériel M, elles ont toujours une résultante qui est représentée en grandeur et en direction par la ligne droite MR qui ferme le contour polygonal formé par les droites successives MP, PP_1, P_1 P_2..., respectivement égales, paralèles et de même sens que les forces P, P′, P″... Lorsque les forces sont au nombre de trois, le polygone de composition peut être remplacé par un parallélipède. Si le contour polygonal se ferme de lui-même, de sorte que la droite MR se réduise à zero, les forces données se font équilibre.

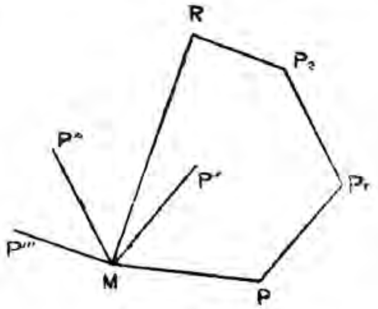

Fig. 16.

4⁰. Réciproquement, une force MR étant donnée, on peut toujours la remplacer par un système équivalent de deux ou plusieurs autres forces, MP, MP′ MP″,... qui agissent suivant des droites données. On dit alors que la force MR a été *décomposée* suivant les directions MP, MP′,... Cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière si le nombre des directions données, MP, MP′,... ne dépasse pas trois; elle peut se faire d'une infinité de manières dans le cas contraire.

5⁰. Lorsque un système de forces parallèles est appliqué à un système invariable de points matériels, il peut se réduire dans le cas général à une résultante unique, et dans certains cas particuliers à un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, MP et M′P′, qui forment ce que l'on appelle un *couple de forces*. Dans le cas où il existe une résultante unique, son point d'application s'appelle le *centre des forces parallèles*, et on démontre que la position de ce point ne change pas par rapport au corps considéré, lorsque la direction des forces change, sans que le rapport entre les grandeurs de ces forces ou leurs points d'application varient. Dans le cas de la pesanteur, ce centre porte le nom particulier de *centre de gravité*.

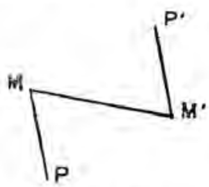

Fig. 17.

6⁰. Dans le cas général, les forces appliquées à un système invariable se réduisent à une force unique et à un couple unique. La force tend à imprimer au système un mouvement de translation, le couple un mouvement de rotation. Ce n'est que dans des cas particuliers que les forces données peuvent se réduire soit à une force unique, soit à un couple unique. Pour que le système soit en equilibre, il faut et il suffit que cette force et ce couple uniques soient séparément nuls.

* * *

Nous avons démontré ci-dessus (ch. III, 2) que les forces sociales peuvent être représentées géométriquement par des vecteurs, de même que les forces physiques.

Il est facile d'appliquer à ces vecteurs exactement les mêmes raisonnements qu'en Mécanique Rationnelle, pour arriver à des conclusions analogues. On peut démontrer ainsi :

1°. Que plusieurs forces sociales appliquées à un même individu suivant la même direction peuvent être remplacées par une force unique, agissant suivant la même direction et égale à leur somme algébrique. Ainsi, deux forces purement économiques, par conséquent parallèles à l'axe OX, s'ajouteront si elles sont de même sens, et se retrancheront l'une de l'autre si elles sont de sens contraires.

2°. Que les forces sociales de direction quelconque qui agissent sur un même individu se composent et se décomposent d'après la règle du parallélogramme, du parallélipipède et du polygone des forces. Comme conséquence, on peut remplacer par une seule toutes les forces sociales qui agissent sur un individu, ce qui permettra d'en simplifier l'étude. On pourra aussi renverser la question, et, pour atteindre un certain but pour lequel une force sociale MR serait nécessaire, remplacer cette force par un certain nombre d'autres forces, plus facilement réalisables, et choisies de telle manière que leur résultante soit MR. Cette substitution ne pourra se faire que d'une seule manière si MR ne doit être remplacée que par deux ou par trois autres forces dont la direction est donnée ; elle pourra se faire d'une infinité de manières, si le nombre des composantes est plus grand que trois.

3°. Généralement rien n'autorise à considérer le corps social comme invariable. Au contraire, la position sociale des individus qui le composent change sans cesse, et par conséquent *la forme* du corps social change aussi. Cependant, comme ces changements ne peuvent se produire que dans un temps qui n'est pas nul, il est permis de considérer le corps social, à un moment donné, comme invariable pour un temps très court. Les forces extérieures appliquées à ce corps pouvant se réduire à ce moment à une force unique et à un couple unique, on voit que le corsp social a à chaque moment une tendance d'avancer par un mouvement de translation, et en même temps une tendance à tourner autour d'un axe dont la position peut être déterminée. Si le corps social conservait une forme invariable, ces doubles mouvements infiniment petits dépendraient seulement des forces qui agissent sur le corps social, et leur succession déterminerait complètement le mouvement social; mais comme cette forme change aussi, le mouvement du corps social ne dépend pas seulement des doubles mouvements infinitésimaux dont nous venons de parler, mais aussi du changement continuel de la forme du corps social.

4°. Le changement infinitésimal de la forme du corps social à un moment donné sera determiné, si l'on connaît à ce moment les forces extérieures qui agissent sur ce corps, ainsi que les actions réciproques des individus qui le composent.

2. *Centre de gravité d'un corps social.*

Tout corps de forme invariable a un centre de gravité, dont la position par rapport au corps reste invariable, à la condition que la forme du corps ne change pas.

La forme d'un corps social étant essentiellement variable, il ne remplit pas cette condition, de sorte qu'il n'y aurait pas lieu de considérer le centre de gravité d'un pareil corps. Mais comme aucun changement social ne peut se produire d'une manière instantanée, on peut admettre qu'à un moment donné et pour un temps très court la forme du corps social reste invariable, et alors on peut songer à déterminer son centre de gravité pour ce moment-là.

La Mécanique Rationelle établit des formules pour le calcul de la position du centre de gravité d'un corps de forme donnée, quand on connaît la grandeur des forces parallèles qui agissent sur chacun des points matériels qui le cămposent. Ces formules seront applicables aussi pour un corps soci l, si l'on y remplace les forces mécaniques par les forces sociales et les points matériels par les individus.

Considérons, par exemple, un intérêt économique quelconque qui touche à toutes les classes d'une société, et, pour préciser, supposons qu'il s'agisse d'établir des droits de douane sur le blé. L'importance de ces droits aura une influence sur le prix du pain, qui est un article de première nécessité pour tous les invididus qui composent la société, qu'ils soient riches ou pauvres. Mais cette nécessité n'affecte pas d'une manière égale tous ces individus : pour le riche, une augmentation du prix du pain n'a pas la même importance que pour le pauvre, dont cette augmentation entame les moyens d'existence d'une manière autrement sensible que pour le riche. Il convient donc, pour tenir compte de cette différence, d'affecter chaque individu d'un coefficient d'autant plus grand que ses moyens d'existence sont plus réduits, et de multiplier par ce coefficient la force sociale qui représente pour chaque individu l'augmentation du prix du pain. Les forces ainsi obtenues seront parallèles, puisque, étant des forces purement économiques, elles sont toutes parallèles à l'axe OX ; on peut donc chercher leur centre.

Voici un autre exemple. Soit un corps social composé de deux seuls groupes, celui des agrariens, A, et celui de industriels, B. Supposons que A et B soient des coefficients numériques proportionnels à l'importance économique de chacun de ces groupes.

Il s'agit d'établir des droits de douane. Les agrariens ont intérêt à ce que ces droits soient aussi élevés que possible pour les céréales, afin de protéger leur propre production ; par contre, ils désirent imposer le moins possible les produits industriels, autant pour les avoir à meilleur compte que pour donner une compensation à l'étranger. C'est le contraire qui arrive pour les industriels, qui désirent se protéger contre la concurrence étrangère et avoir le pain bon-marché. Soit α le rapport que les agrariens prétendent établir entre les droits sur les céréales et ceux sur les produits industriels ; soit β la valeur de ce rapport exigé par les industriels. Le poids dont α jouit dans la question est évidemment proportionnel à l'importance A du groupe qui le soutient, et en est de même pour β. Mais le législateur ne doit pas considérer seulement les intérêts purement matériels des deux groupes en présence ; il a le dévoir de tenir compte de tous les intérêts sociaux qui lui sont confiés, et qui imposent qu'à un moment donné le centre de gravité de la société se rapproche tantôt de tel groupe, tantôt de tel autre. Si, par exemple, le groupe B était très peu nombreux par rapport à A, il risquerait d'être écrasé, si on ne tenait compte que de son importance numérique, ce qui ne peut pas être admis, surtout si nous supposons que ce groupe représente la partie la plus intelligente, ou la plus active, ou la plus solide de la population. C'est le législateur qui, tenant compte de toutes les circonstances, doit affecter chaque groupe d'un coefficient proportionnel à son importance dans la question. La position du centre de gravité de la société, pour la question spéciale que l'on a en vue, poura alors être déterminée par les formules habituelles de la Statique Rationnelle.

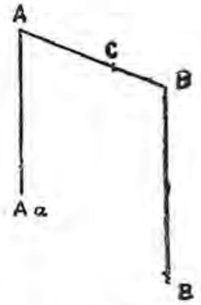

Fig. 18.

Cela fait, l'équation connue

$$\frac{A\alpha}{B\beta} = \frac{BC}{AC}$$

donne la valeur du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ que l'on doit établir entre les prétentions des deux groupes rivaux.

Cette manière de procéder est déjà appliquée quelquefois; c'est ainsi que les ingénieurs pour, déterminer l'emplacement d'une gare, cherchent le centre de gravité des localités qu'elle doit desservir, après les avoir affectées respectivement d'un coefficient proportionnel à leur importance au point de vue du trafic.

3. *Principe des vitesses virtuelles.*

Le principe des vitesses virtuelles, que l'on démontre en Mécanique Rationnelle, est une propriété très générale de l'équilibre des forces mécaniques appliquées à un système matériel quelconque. Voici en quoi il consiste.

Soit un système composé des points matériels A, A',A'', .., qui sont soumis à des forces, P, P', P''.... ainsi qu'à certaines conditions imposées d'avance et auxquelles ils doivent satisfaire. Ainsi, on peut imposer les conditions que les points A et A' restent à une distance constante l'une de l'autre, que A'' soit obligé de rester sur une surfance fixe, que A''' ne s'écarte pas d'une certaine courbe, et ainsi de suite. On appelle *liaisons* ces conditions imposées au système.

Considérons deux positions du système, infiniment voisines l'une de l'autre, et dont chacune satisfasse à toutes les conditions imposées. Soient A et a les deux positions infiniment voisines de l'un quelconque des points du système, et P la force appliquée a ce point. La droite infiniment petite Aa s'appelle *la vitesse virtuelle* ou *le mouvement virtuel* du point A.

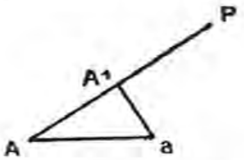

Fig. 19.

Le mot *virtuel* indique que le mouvement Aa n'est pas un mouvement réel, tel que la force P pourrait le produire, en égard aux conditions imposées au système. C'est un simple déplacement purement géometrique que l'on pourrait imprimer au point A, sans se préocuper des forces P, mais avec la seule préoccupation que les liaisons imposées au système soient satisfaites.

Cela étant, on conçoit que, en général, il est possible d'imprimer à un système donné, et avec les liaisons données, une infinité de mouvements virtuels. Ainsi, si les points A et A′ doivent rester à une distance constante l'un de l'autre, on peut déplacer n'importe comment dans l'espace la droite AA′, et la condition sera remplie, tant que la longueur de cette droite ne variera pas. De même, si on impose à A″ la condition de se trouver sans cesse sur une surface fixe, il sera permis de déplacer A″ sur cette surface dans n'importe quelle direction autour de sa position actuelle.

On appelle *moment virtuel* de la force P appliquée au point A du système, le produit $P \times AA_1$ de la valeur P de la force par la projection orthogonale AA_1 de la vitesse virtuelle Aa sur la direction de la force P.

Le principe des vitesses virtuelles s'énonce ainsi :

Si un système matériel est soumis à un système de forces et à un certain nombre de liaisons, et si ces forces se font équilibre, la somme algébrique des moments virtuels de toutes ces forces est nulle pour tous les mouvements virtuels du système qui sont compatibles avec les liaisons qui lui sont imposées.

Cette propriété s'exprime par l'équation

$$\sum P \times AA_1 = 0.$$

* * *

Il existe, en Mécanique Rationnelle, plusieurs manières de démontrer le principe des vitesses virtuelles. Il est facile de vérifier que, avec la manière de représentation que nous avons admise au ch. III et avec les réserves que nous y avons formulées, ces démonstrations s'appliquent aussi pour les forces sociales qui agissent sur un corps social. Nous pouvons donc formuler le principe suivant :

Si un corps social quelconque est soumis à certaines forces sociales et à un certain nombre de liaisons, et si ces forces se font équilibre, la somme algébrique des moments virtuels de toutes ces forces sociales est nulle pour tous les mouvements virtuels du corps social qui sont compatibles avec les liaisons qui lui sont imposées.

* * *

En Mécanique Rationnelle, les liaisons imposées à un système matériel s'expriment généralement par des équations entre les coordonnées des points matériels qui le composent ; quelquefois aussi elles s'expriment par des inégalités. En ce dernier cas, l'énoncé du principe subit une modification en ce sens, que la somme des vitesses virtuelles doit être nulle ou négative pour tous les mouvements virtuels qui sont possibles dans un seul sens, considéré comme positif.

Il en sera de même en Mécanique Sociale. Les conditions imposées à un corps social pourront quelquefois s'exprimer par des équations. Pour un militaire, pour un moine, la discipline sévère à laquelle ils sont soumis impose à leur mouvement social des limites telles, qu'ils ne peuvent s'écarter de la ligne qui leur est tracée et qui est connue d'avance ; c'est par des équations que cette ligne pourra être représentée. Dans le régimes des castes, le développement social de l'individu est limité dans certaines directions, quelquefois dans toutes : il ne peut pas prétendre à une instruction qui dépasse un certain niveau, son état moral ne peut pas s'élever au-delà d'une certaine limite, sa richesse ne peut pas grandir trop, il n'a pas droit à l'acquisition de la terre. Dans ce régime, l'individu peut être considéré comme étant libre de se mouvoir à l'intérieur d'une certaine surface, qu'il ne peut pas franchir. Ce sont des inégalités qui exprimeront cet état de choses, en écrivant que, pour telle direction, les coordonnées de l'individu seront inférieures ou tout au plus égales à celles du point de la surface qui se trouve sur cette direction.

* * *

Il peut sembler que le principe des vitesses virtuelles, que nous venons d'établir en Mécanique Sociale, soit plutôt une curiosité scientifique qu'une acquisition de quelque utilité pratique en Sociologie. Il n'est pas sûr qu'il en soit ainsi. Dans l'histoire des sciences, les exemples sont nombreux où des principes abstraits, à première vue complètement inutilisables, sont devenus le point de départ de théories et d'applications importantes. En Mécanique Rationnelle, le principe même des vitesses virtuelles et celui de d'Alembert sont devenus, entre les mains de Lagrange, la base de la science dont l'ensemble présente la plus parfaite unité. Les lois de Ohm, si longtemps méconnues, sont aujourd'hui le fondement le plus solide des merveilleuses applications de l'électricité ; et ainsi de suite. Il n'y a pas de raison de croire que la Sociologie seule fera éternellement exception.

4. *Stabilité de l'équilibre social.*

En Mécanique Rationnelle, lorsque un système de forces quelconques appliquées à un système matériel se font équilibre, on dit que cet équilibre est *stable* alors que, le système matériel étant écarté très peu de sa position d'équilibre, il tend à y revenir. L'équilibre est *instable*, lorsque le système tend à s'éloigner de plus en plus de sa position d'équilibre.

Soit, par exemple, un système composé d'un seul point matériel soumis à la seule force de la pesanteur, et obligé à rester sur une courbe fixe CC'.

Il est évident que notre point matériel sera en équilibre s'il est posé en A, qui est le plus bas de tous les points de la courbe qui lui sont immédiatement voisins. Il est évident aussi que si nous écartons très peu notre mobile sur la courbe, à droite ou à gauche du point A, son poids le fera retomber le long de cette courbe et le rapprochera de nouveau de A, de sorte que, après quelques oscillations, il y restera de nouveau en équilibre. Cet équilibre est donc stable.

Le mobile sera en équilibre aussi au point B, qui est plus élevé sur la courbe que ceux qui le précèdent et qui le suivent; mais si le mobile est déplacé très peu sur sa courbe à droite ou à gauche de B, son poids le fera glisser sur cette courbe et l'éloignera de plus en plus de B; c'est un équilibre instable.

Considérons encore un solide pesant dont un des points est fixe. Ce solide sera en équilibre stable, si son centre de gravité se trouve placé sur la même verticale que le point fixe, et au-

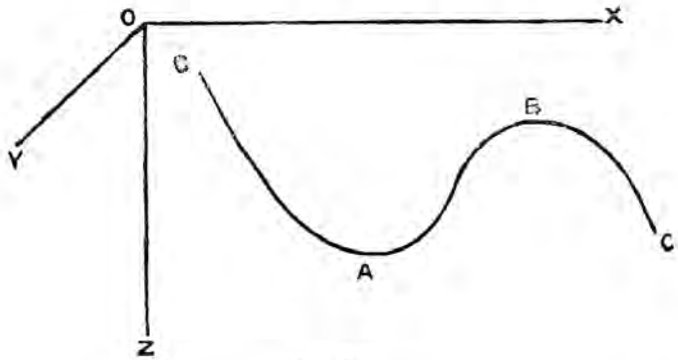

Fig. 20.

dessous de lui; l'équilibre sera instable, si le centre de gravité se trouve au-dessus du point fixe.

Dans le cas général il n'est pas aussi facile de discerner si l'état d'équilibre d'un système est stable ou non, et l'établissement d'une théorie mathématique générale de la stabilité de l'équilibre demanderait de grands efforts. Cependant on est déjà parvenu à démontrer quelques propriétés utiles.

Le principe des vitesses virtuelles ayant lieu pour tout système de forces en équilibre, l'équation.

$$\sum P \times AA_1 = 0,$$

établie au paragraphe précédent doit avoir lieu. Or il arrive très souvent qu'il existe une fonction telle, que $\sum P \times AA_1$ est sa différentielle totale exacte. On démontre d'autre part qu'une des conditions pour que la fonctio soit maximum ou minimum, est que sa différentielle totale soit nulle.

Supposons que les données de notre problème soient telles que la fonction existe. Comme dans l'état d'équilibre la différentielle totale $\sum P \times AA_1$ de cette fonction est nulle, il s'en suit que dans cet état la fonction doit être maximum ou minimum, si de plus certaine autre condition mathématique est aussi remplie. Or on démontre que *si la fonction* φ *existe et si elle est maximum, l'equilibre est toujours stable.* Si la fonction est minimum, on ne peut plus affirmer si l'équilibre est stable ou non ; il faut alors examiner chaque cas particulier, pour savoir à quoi s'en tenir.

La fonction φ en Mécanique Rationnelle une signification précise ; elles s'appelle la *fonction des forces*, et elle représente la somme d'énergie dépendée dans le mouvement et pendant le temps considérés. (Voir plus bas, ch. V, 10).

* * *

Si nous passons maintenant aux phénomènes sociaux, nous voyons que les conséquences précédentes s'y appliquent aussi, du moment que ces phénomènes sont aussi sujets au principe des vitesses virtuelles.

Nous dirons donc que pour que l'équilibre d'un système de forces sociales appliquées à une société donnée dans des conditions données soit stable, une première condition doit être remplie, celle que la fonction des forces existe. Si elle existe et si elle est maximum, l'équilibre est stable. Mais il peut être stable aussi dans des cas où la fonction des forces serait minimum ; seulement ces cas ne peuvent pas être prévus d'une manière générale, et pour les établir, il faut étudier chaque cas en particulier.

* * *

Essayons maintenant de nous rendre compte de la signification de ces résultats.

Remarquons d'abord que le mouvement social est à chaque instant le résultat des forces sociales auxquelles le corps social est soumis à cet instant, ainsi que de l'impulsion qu'il possède déjà, due à son mouvement antérieur. Si les forces se font équilibre, la première de ces deux causes de mouvement se réduit à zéro, mais la seconde reste ; de sorte qu'il ne faut pas croire que l'existence de l'équilibre des forces appliquées à un corps social implique nécessairement l'état de repos de ce corps. Cet état ne serait qu'un cas particulier, de celui où les forces sociales se feraient équilibre. Par conséquent, les conditions que nous venons de trouver pour la stabilité de l'équilibre d'un système de forces, s'appliquent aussi bien à un corps cocial en repos qu'à celui qui aurait un mouvement du uniquement à l'impulsion antérieure.

L'état de repos d'un corps social est celui où chaque individu garde une situation sociale constante c'est-à-dire où son état économique, intellectuel et moral demeurent invariables. C'est le cas des sociétés sauvages. Ce serait aussi le cas d'une société civilisée dans laquelle chaque individu serait entièrement content de son sort et dépourvu de toute aspiration, et où le autres forces sociales seraient telles, qu'en s'équilibrant, elles ne pourraient pas, à elles seules, modifier la forme du corps social.

Dans le cas général, même si les forces sociales se font équilibre, le mouvement social a toujours lieu en vertu de l'impulsion antérieure, de sorte que la position sociale de chaque individu, ainsi que la forme du corps social, peuvent continuer à varier.

Le rêve de l'équilibre social stable préoccupe l'esprit de beaucoup de penseurs, désireux de voir cesser les luttes acharnées que les hommes se livrent pour la conquête d'une parcelle de bonheur. Examinons la question.

Et d'abord il faut éclaircir un premier point, que les partisans de l'équilibre social ne précisent pas : entendent-ils par équilibre social l'état de repos du corps social ? Ou bien ils pensent conserver le mouvement social du à l'impulsion antérieure ?

La première hypothèse n'est pas admissible. En effet, une société dépourvue de tout mouvement social, réduite à la simple vie végétative, n'est possible qu'à plusieurs conditions. Il faut d'abord que les ressources dont elle dispose soient à chaque instant exactement égales à ses besoins. Dès que cette égalité disparaîtra, il y aura lutte pour la conquête du surplus, s'il y en a ; et il y aura lutte aussi en cas d'insuffisance, car chacun voudra conserver ce qu'il a. Croire que par l'emploi de la force on pourra comprimer ce penchant naturel est une illusion ; et même si on y parvenait, l'emploi même de la force serait la négation de l'état d'équilibre.

On trouve bien l'état de repos social dans les sociétés sauvages, où chaque individu jouit, pendant toute sa vie, des mêmes droits, des mêmes obligations, des mêms moyens d'existence, de la même position sociale. Mais on ne peut pas invoquer cet exemple à l'appui de la théorie du repos. D'abord, parce qu'on ne peut pas prendre les sociétés sauvages comme modèle, quand il s'agit d'organiser des sociétés civilisées. Ensuite parce que les circonstances qui permettent aux sauvages de conserver leur état de repos social ne se retrouvent pas pour les hommes civilisés. Une tribu indienne vivait au milieu d'une savane immense, où des troupeaux de miliers de bisons pourvoyaient amplement à tous ses besoins. Une fois sa provision de viande et de peaux faite pour toute l'année, l'Indien n'avait plus d'autres besoins, et il n'y avait pas de raison pour lui de désirer le changement d'un état social qui pour lui était le seul connu et le seul possible. Et encore l'état d'équilibre social de la tribu était assez précaire, vu qu'à chaque instant elle était en guerre avec les tribus voisines, pour défendre son bien.

Du reste, la condition fondamentale du maintien de cet état de repos était qu'aucune cause extérieure n'intervienne qui le troublât. Or l'importation du cheval et des armes à feu fut une de ces causes ; elle augmenta la force d'attaque de l'Indien ; chaque tribu put élargir le cercle de son action, ce qui multiplia les conflits avec les tribus voisines et les rendit plus meurtriers. L'équilibre antérieur était rompu.

La diminution, et finalement la disparition des troupeaux de bisons, rendues possibles par l'acquisition du cheval et du fusil, et en dernier lieu par la pénétration de la civilisation dans ces régions éloignées, fut une autre cause de destruction de l'état de repos social des tribus indiennes ; mais cette fois ce fut un mouvement de recul, jusqu'à complet anéantissement de la vie sociale.

Si tel a été le cas pour des tribus sauvages dont la somme de besoins était si réduite, à plus forte raison l'état de repos social stable est impossible pour une société civilisée.

D'abord, pour arriver à cet état de repos, il faudrait réduire graduellement, et finalement supprimer entièrement le mouvement social déjà existant de ces sociétés ; autrement dit, il faudrait supprimer le progrès. Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire de démontrer l'impossibilité d'une pareille entreprise, surtout au moment où l'intensité de ce mouvement est plus grande que jamais.

D'autre part, la terre commence déjà à devenir trop petite pour ceux qui l'habitent, et il passera encore beaucoup de temps jusqu'à ce que, de gré ou de force, on se soit tassé de manière que chacun arrive à avoir sa place. Supposons qu'à cette époque éloignée, quand il n'y aura plus rien à gagner, on arrive par un moyen quelconque à réaliser le repos social. Il est facile de prévoir que cet état ne pourra pas être stable, car, sans compter d'autres raisons, le seul fait de la multiplication naturelle de la population créera des besoins nouveaux, qui suffiront pour remettre la société en mouvement.

En résumé, l'état de repos social ne peut pas être réalisé pour les sociétés civilisées; s'il l'était, il ne serait pas stable; et de plus, il n'est pas désirable. Les raisons que nous en avons données ne sont pas les seules, mais nous croyons inutile d'insister davantage sur cette question, d'autant plus qu'il est peu admissible que les penseurs qui poursuivent l'idéal de l'équilibre social l'aient compris de cette façon.

Ce cas étant écarté de la discusion, il reste à considérer celui où le mouvement dû à l'impulsion antérieure étant conservé, il s'agit d'établir l'équilibre des forces sociales.

Ce problème peut être considéré à deux points de vue différents.

Premièrement, on peut se proposer de faire en sorte que les forces extérieures appliquées au système social considéré se fassent équilibre entre elles, de manière, qu'elles n'exercent aucune influence sur le mouvement du système dû à l'impulsion antérieure. Ce faisant, l'invariabilité de la forme du corps social n'est pas assurée, car rien n'indique que le mouvement du système se fasse de telle sorte que sa forme reste invariable. Comme comparaison, considérons le système solaire. Tant qu'il est soumis aux seules forces intérieures qui se développent entre les divers corps qui le composent, les mouvements de ces corps font changer à chaque instant leur disposition, et par suite la forme du système. Si maintenant on applique à ce système certaines forces extérieures, telles que l'attraction des étoiles fixes, ces forces feront changer les mouvements des corps qui composent le système. Mais si ces forces s'équilibraient entre elles, elles ne modifieraient plus en rien le mouvement antérieur du système solaire, qui continuerait par conséquent à changer sans cesse de forme.

Ce n'est pas là le problème qui préoccupe les partisans de l'équilibre social, car ce qu'ils poursuivent est justement la recherche des moyens par lesquels, une forme sociale conforme à leurs désirs étant réalisée, cette forme puisse être conservée indéfiniment.

Le second point de vue auquel la question peut être considérée, est celui où l'on se propose d'établir l'équilibre des forces sociales, tant extérieures qu'intérieures, avec la condition que la forme du corps social reste invariable, ce qui modifiera en général le mouvement que ce corps avait déjà par suite de son impulsion antérieure.

C'est là le problème que se posent les partisans de l'équilibre social. En théorie, il est toujours possible, car on peut toujours déterminer les forces que l'on doit ajouter à un système de forces données, pour leur faire équilibre, dans des conditions données. Mais cela ne suffit pas, car la solution une fois trouvée, il s'agit de savoir si l'état d'équilibre qu'elle définit est stable ou non. Or nous avons établi les conditions auxquelles cette stabilité est assurée.

Il faut, en premier lieu, que la fonction des forces que nous avons définie ci-dessus, existe. On démontre en Mécanique Rationnelle qu'il faut pour cela que les forces ne soient pas fonctions explicites du temps, mais dépendent seulement des coordonnées des points matériels qui composent le système. En Mécanique Sociale, il set difficile d'admettre que cette condition sera remplie d'une manière générale ; car il y a des forces sociales, telles que la multiplication de la population, le taux d'intérêt de l'argent, et tant d'autres, qui manifestement sont fonction du temps. Cette difficulté ne disparaîtrait que dans le cas où les termes qui empêcheraient l'intégration disparaîtraient d'eux-mêmes dans l'équation, ce qui est infiniment peu probable, ou si leur valeur était assez petite pour pouvoir être négligée. Voilà une première raison pour laquelle la stabilité de l'équilibre social devient très peu probable.

Une autre raison de cette impossibilité est que, même si la stabilité avait été assurée avec les forces considérées à un certain moment, elle disparaîtrait dès que de nouvelles forces, interviendraient ; et comme rien n'est stable dans la nature, et que de nouvelles forces peuvent surgir à chaque instant autour ou à l'intérieur d'un corps social, la stabilité de l'équilibre n'est rien moins qu'assurée.

Si ces difficultés sont vaincues, la stabilité de l'équilibre n'est encore sûre que si la fonction des forces est maximum.

On peut donc dire que la stabiilité de l'équilibre social est presque toujours impossible.

* * *

La question de la stabilité de l'équilibre a fait l'objet de deux chapitres, le XIX-e et le XXII-e, des *Premiers Principes* de Herbert Spencer. Sous le titre *Instabilité de l'homogène*, le grand philosophe s'efforce de démontrer l'impossibilité de la stabilité de l'équilibre d'une masse homogène, et il étend sa démonstration aussi aux masses sociales. Mais son raisonnement laisse à désirer ; il contient des inexactitudes et des confusions qui en enlèvent toute la valeur. B. Brunhes (*Dégradation de l'énergie*, p. 346) arrive à la conclusion contraire, c'est-à-dire que non seulement la stabilité de l'équilibre d'une masse homogène est possible, mais que la destruction de cet équilibre est infiniment peu probable.

La discussion précédente montre que, dans une certaine mesure, et pour H. Spencer seulement en ce qui concerne ses conclusions, ils peuvent avoir raison tous les deux, à condition de bien préciser toutes les circonstances. Mais en se bornant à étudier l'homogène, ces auteurs ont énormément restreint la généralité du problème. Pour ce qui concerne une masse sociale, le raisonnement de H. Spencer, même s'il avait été juste, aurait été inutile, car l'homogénité d'une masse sociale exige en première ligne l'égalité parfaite entre tous les individus qui la composent, tant au point de vue moral et économique, qu'au point de vue intellectuel, ce qui est une impossibilité évidente.

Nous espérons que le raisonnement que nous venons d'exposer est exempt de ces objections, car il embrasse le problème dans toute sa généralité et précise les conditions auxquelles la stabilité de l'équilibre peut ou ne peut pas exister.

Nous pouvons dire cependant que, en se tenant sur le terrain restreint de l'homogénéité, Brunhes voit très clair quand, en s'exprimant conformément à sa théorie de la dégradation de l'énergie, il caractérise ainsi la possibilité de la stabilité de l'équilibre de l'homogène : „L'homogène est instable quand la différenciation est accompagnée d'une dégradation d'énergie ; l'homogène est stable et aucune différenciation ne se produit, lorsque cette différenciation comporterait une restauration d'énergie utilisable". (pages 354). Ce n'est que l'énoncé, dans un langage différent, du principe démontré ci-dessus que „La stabilité de l'équilibre est assurée dans le cas où la fonction des forces est maximum pour cet état d'équilibre".

Pour mieux saisir le sens de cette proposition, reportons-nous à la figure de la page 345. Tant que le mobile glisse sur la partie C A de la courbe, dans le sens de C vers la A, la fonction des forces va en augmentant, car sa valeur, pour ce cas particulier, est égale au poinds du mobile multiplié par la distance parcourue dans le sens de la pesanteur ; et comme cette distance va en augmentant tant que le mobile tombe le produit augmente aussi. La fonction des forces donne la mesure de la quantité d'énergie développée pendant le mouvement considéré ; donc on peut dire que sur la partie C A de la courbe la quantité d'énergie dévéloppée va en augmentant. Le point A une fois dépassé, cette quantité commence à se reformer, car le mobile récupère la possibilité de retomber, et l'énergie récupérée est maximum en B. La quantité d'énergie dépensée est donc maximum en A, où l'équilibre est stable, en effet ; elle est minimum en B, où cet équilibre est instable.

* * *

Quant à la conclusion, quelquefois juste, que H. Spencer a tirée de sa démonstration pour le cas très particulier qu'il a eu en vue, ou peut la rendre sensible par l'exemple suivant qui montre en même temps que cette démonstration n'est ni exacte, ni générale.

Considérons une société composée d'un nombre indéfini d'individus parfaitement identiques entre eux, entre lesquels s'exerce une attraction inversement proportionnelle à une puissance entière et positive de la distance, et qui est la même à distance égale, quels que soient les individus entre lesquels elle s'exerce. Plaçons ces individus à des distances égales les uns des autres, de sorte que chacun d'eux se trouve au sommet d'un tétraèdre régulier dont les trois autres sommets soient occupés par d'autres individus. On formera ainsi une suite indéfinie de tétraèdres réguliers égaux, accolés par une de leurs faces. Il est évident que le système ainsi disposé sera en équilibre, car chaque individu sera également sollicité par tous ceux qui l'entourent et dans des direction qui sont deux par deux directement opposées. Mais si l'on déplace si peu que cela soit un seul A de ces individus de sa position d'équilibre, pour le rapprocher, par exemple, de ses voisins de droite, l'attraction que ces derniers exercent sur lui deviendra plus forte que celle des voisins de gauche. L'individu considéré cèdera alors à l'attraction la plus forte, et viendra se confondre avec ses voisins de droite. Cela donnera lieu à un groupe de deux ou plusieurs individus, dont l'attraction plus puissante s'exercera tout autour, et rompra l'équilibre qui existait pour les individus voisins. Chacun d'eux cédera donc à l'attraction du groupe, qui sera la plus forte, et viendra se réunir à lui, ce qui donnera lieu à un centre d'attraction encore plus fort. De cette manière, ce centre d'attraction deviendra de plus en plus puissant et continuera à attirer à lui de proche en proche tous les individus composant la masse considérée. Or cette masse, dans sa disposition primitive, était homogène et en état d'équilibre. Ce que nous venons de dire prouve que cet équilibre était instable.

Mais si au lieu d'une force d'attraction, nous avions admis que la force s'exerçant entre les individus était une répulsion inversement proportionnelle à une puissance entière et positive de la distance, et si nous faisons encore approcher, si peu que cela soit, l'individu A de ses voisins de droite, la repulsion que ces derniers exercent sur lui augmentera, tandis que celle des voisins de gauche diminuera. Le résultat sera que A, cédant à l'action la plus forte, au lieu de continuer à s'éloigner vers la droite, comme tout-à-l'heure, reviendra vers la gauche et tendra à reprendre la position qu'il avait quittée. L'équilibre sera donc stable.

Cet exemple très simple ne peut pas être considéré comme une démonstration, car le cas d'équilibre qu'il considère n'est qu'un cas très particulier. Mais il suffit pour faire voir facilement que la proposition de H. Spencer sur l'instabilité de l'homogène, qui peut être exacte dans certains cas, peut aussi ne pas se vérifier dans certains autres.

CHAPITRE V.

Dynamique sociale.

1. *Axiomes de la Dynamique Rationnelle.*

Comme toutes les branches des sciences mathématiques, la Dynamique Rationnelle a comme point de départ un certain nombre d'axiomes, d'où toutes ses théories découlent par voie de simple déduction. Ces axiomes sont considérés comme résultat de l'observation des phénomènes mécaniques. C'est ainsi que la Géométrie aussi est fondée sur quelques principes, tels que „Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles" et „La partie est plus petite que le tout qui la contient", qui ont été établis tout d'abord par l'observation, mais qui, à force d'être vérifiés une infinité de fois par l'expérience, sont devenus pour nous presque évidents par eux-mêmes.

Pour les axiomes de la Dynamique, la différence est que leur vérification par l'expérience est beaucoup plus difficile, et que par conséquent ils se présentent à notre esprit avec un moindre caractère d'évidence que ceux de la Géométrie. Cependant la Mécanique Céleste tout entière, ainsi que quelques autres phénomènes mécaniques, donnent des moyens de vérification très sûrs et très précis, qui montrent une concordance tellement parfaite entre les résultats de l'observation et ceux que l'on déduit des axiomes pris comme point de départ, que nous sommes autorisés à admettre la parfaite exactitude de ces axiomes.

Les axiomes de la Dynamique Rationnelle sont au nombre de trois.

Le premier est connu sous le nom de *principe de l'inertie*. Voici en quoi il consiste.

Considérons un point matériel en repos et qui n'est sollicité par aucune force. Nous admettons qu'il restera indéfiniment en repos, tant qu'aucune force ne viendra agir sur lui.

Et en effet, s'il devait se mettre en mouvement, il devrait le faire dans une certaine direction, et il n'y a aucune raison pour qu'il se déplace dans une direction plutôt que dans une autre, du moment que cette préférence ne serait déterminée par rien.

En second lieu, si un point matériel a un certain mouvement sous l'action de certaines forces, et si à un moment quelconque ces forces venaient à disparaître tout-à-coup, le mobile continuera à se mouvoir indéfiniment d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire en parcourant des espaces égaux pendant des temps égaux ; et ce mouvement aura lieu en ligne droite, sur la tangente MT menée à la courbe qu'il avait décrite jusque là, au point M où l'action des forces a subitement cessé. En effet, il semble évident que ce mouvement devra être rectiligne, et dirigé sur la tangente au point M, car cette tangente est le prolongement de l'élément rectiligne infinitésimal de la courbe que le mobile a parcouru en dernier lieu, et il n'y a pas de raison d'admettre que le mobile devra s'écarter de cette droite dans une direction plutôt que dans une autre.

Fig. 21.

Il est moins facile d'admettre que ce mouvement devra se prolonger indéfiniment d'une manière uniforme. Cette partie de l'axiome ne peut pas être vérifiée par l'observation directe, car nous n'avons pas le moyen d'observer ni des longueurs, ni des durées infinies ; mais nous sommes en droit d'admettre l'exactitude de cette partie de l'axiome, pour la raison que ses conséquences se vérifient exactement en Mécanique Céleste et ailleurs.

Le second axiome est celui *des mouvements relatifs*, et il s'énonce ainsi :

Soit un système de points matériels, M, M′, M″, ... qui se déplacent dans l'espace de telle manière, que les chemins parcourus par tous ces points pendant le même temps et au même moment soient égaux et parallèles ; c'est ce que l'on appelle un *mouvement de translation*. Il suit de là que la figure formée par ces points restera invariables pendant le mouvement, car leurs distances respectives ne changeront pas, et ils sembleront ne pas se déplacer le uns par rapport aux autres. Si maintenant nous appliquons à un seul, M, de ces points une force P que nous n'appliquons pas aux autres, la figure du système sera changée, car les points M', M'', ... auxquels la force P n'est pas appliquée, continueront leur mouvement antérieur sans modification, tandis que le point M, sous l'action de la force P, prendra un mouvement propre par rapport aux autres points du système. Le principe des mouvements relatifs dit que *ce mouvement du point M par rapport aux points M', M'', ... est le même que le mouvement qu'il aurait pris sous l'action de la force P, s'il etait parti du repos.*

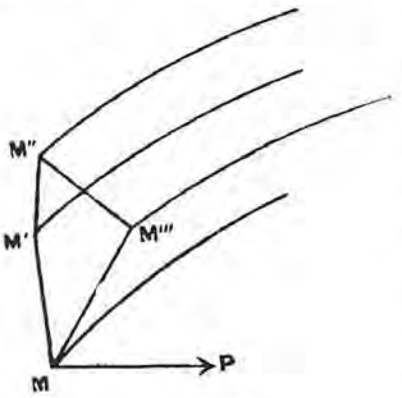

Fig. 22.

Considérons, par exemple, un bateau en repos et une bille posée sur le pont de ce bateau. Si cette bille est enduite de craie et si nous lui imprimons un mouvement sur le pont, en lui appliquant un coup d'une certaine force et dans une certaine direction, elle laissera sur le pont une certaine trace. Si maintenant le bateau se met en mouvement et que nous répétons l'expérience exactement dans les mêmes conditions, la ligne que la bille tracera sur le pont sera la même que la première fois, et les deux mouvements auront lieu d'après la même loi.

Le troisième et dernier axiome est nommé *axiome de l'action et réaction*, et on l'énonce en disant que *si un point matériel A exerce une action quelconque sur un autre point matériel B, le point B à son tour exerce sur A une action égale et directement opposée à la première.*

Si, par exemple, A est un aimant et B un morceau de fer, il y aura attraction entre A et B. Si A est fixe, B se rapprochera de A avec une force que l'on peut mesurer par divers moyens. Mais si B est fixe, c'est A qui se rapprochera de B, et on peut vérifier que la force avec laquelle il s'en rapproche est égale à celle qui avait été précédemment mesurée.

* * *

Tels sont les trois principes dont on tire par déduction toutes les théories dont l'ensemble constitue la Dynamique Rationnelle. Si pour quelques-uns de leurs énoncés le raisonnement peut suffire pour nous les faire entrevoir, aucun d'eux ne peut être vérifié par des expériences directes et d'une rigueur absolue. Pour tous, la seule vérification possible est celle de comparer les résultats de la théorie avec ceux de l'expérience. Comme dans tous les cas où cette comparaison a pu être faite dans des conditions suffisantes d'exactitude l'accord a été reconnu parfait, nous sommes en droit de considérer la Dynamique Rationnelle comme une science exacte et établie sur des bases sûres.

2. *Axiomes de la Dinamique Sociale.*

Nous essaierons maintenant de montrer que l'on peut énoncer pour les phénomènes sociaux des principes analogues à ceux qui régissent les phénomènes mécaniques.

Principe de l'inertie. Considérons un individu à l'état de repos social. Cela veut dire que sa position sociale ne change pas, ni au point de vue économique, ni intellectuel, ni moral; par conséquent il n'est sujet à aucune force sociale, si petite soit-elle; car, par définition, une force sociale est une cause qui produit un mouvement social; et comme ce mouvement, par hypothèse, n'existe pas, la force n'existe pas non plus. Alors l'individu, étant déjà au repos et n'étant sujet à aucune force, restera indéfiniment en repos; car s'il en sortait, il devrait nécessairement prendre une direction déterminée quelconque; et il n'y a pas de raison pour qu'il prenne telle direction plutôt que telle autre.

Cette conclusion semble contraire à la réalité des choses. En effet, si en Dynamique Rationnelle on peut l'admettre, c'est que la matière par elle-même est inerte, et ne peut pas sortir du repos que grâce à une action qui lui vienne du dehors. Il n'en est pas de même pour l'homme. Le froid, qui l'oblige à chercher un abri et les moyens de se couvrir; la nécessité de vivre en société, qui lui impose une certaine morale, sont bien des forces sociales qui viennent de causes extérieures à l'individu. Mais la faim, qui le force à mettre de côté le surplus de nourriture en vue des jours de disette, et son intelligence sont les premiers facteurs de son progrès économique et intellectuel. C'est ainsi qu'un individu abandonné seul dans une île déserte saurait tirer profit de ses ressources, grâce à son énergie et à son intelligence, ce qui veut dire qu'il est capable par lui-même de faire varier sa position sociale.

Cette dificulté peut être facilement écartée, si l'on considère l'intelligence comme une simple force sociale qui agit sur l'individu exactement de la même manière que tout autre force sociale. Dans cette conception, l'individu proprement dit n'est que l'élément inerte, qui est mis en mouvement social par des forces sociales, au nombre desquelles il faut copmter aussi sa propre intelligence et sa propre volonté. De cette manière, la conclusion précédente n'a plus rien d'inexact; car le repos social de l'individu se maintiendra tant qu'aucune force sociale n'interviendra, son intelligence et sa volonté pas plus qu'une autre.

Cette manière de concevoir les choses ne diffère pas au fond de ce que l'on fait en Mécanique Rationnelle. Considérons un aimant mis en présence d'un morceau de fer doux. Si le morceau de fer est fixe et l'aimant libre, ce dernier se mettra en mouvement pour se rapprocher du premier. Ce mouvement n'est dû qu'à la force du magnétisme qui réside dans l'aimant, et qui seule est cause du phénomène; car si au lieu de l'aimant nous substituons un second morceau de fer doux, le mouvement n'aura plus lieu. Nous disons cependant que le mouvement de l'aimant est produit par l'attraction du fer, parce que les choses se passent comme si cette attraction existait réellement. Nous séparons donc dans notre esprit l'aimant de sa propriété d'attirer le fer, et nous attribuons à une cause extérieure son mouvement dont la cause réelle est une propriété de ce même aimant.

Nous ne faisons pas autre chose en considérant l'individu comme distinct des forces sociales dont il est lui-même la source.

Cette difficulté écartée, poursuivons l'étude de la question qui nous occupe, et supposons que l'individu, au lieu d'être en repos social, ait un mouvement sous l'action de certaines forces sociales qui à un moment disparaissent subitement.

Pour simplifier, supposons que les forces qui déterminent le mouvement sont des forces exclusivement économiques, par conséquent parallèles à l'axe OX, et que le mouvement que l'individu possède est aussi parallèle à OX.

Nous admettrons que si l'action des forces cesse brusquement, l'individu continuera, à partir de ce moment, à avoir un mouvement social uniforme, toujours parallèle à OX.

Cette proposition semble assez hardie, et l'esprit éprouve quelque difficulté à l'admettre. Mais nous ferons remarquer qu'il n'en va pas autrement en Mécanique Rationnelle, quand, à propos du principe de l'inertie, il s'agit, pour un nouvel initié, de s'habituer à l'idée que „Cessante causa non cessat effectus," et qu'un mouvement provoqué par une cause qui a cessé d'agir depuis longtemps doit se poursuivre indéfinissant.

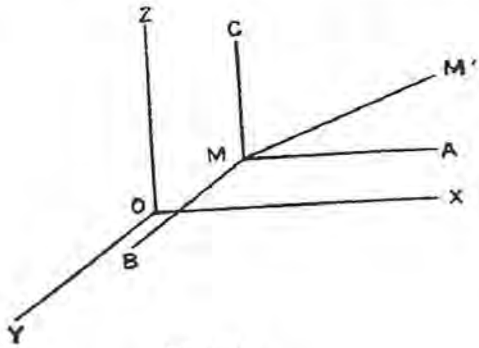

Fig. 23.

Ce n'est qu'après beaucoup de temps que l'esprit s'habitue à cette idée, et ses doutes ne cessent, plus ou moins complètement, qu'après vérification répétée des résultats auxquels cette théorie conduit. Ce n'est donc pas le doute que notre proposition soulèvera qui sera une raison suffisante pour qu'elle soit écartée. S'il en avait été ainsi au moment où les Galilée et les Newton posaient les bases de la Dynamique Rationnelle, cette science n'existerait pas aujourd'hui, et l'esprit humain aurait été privé d'une des plus admirables de ses conquêtes.

Nous admettrons donc la proposition formulée ci-dessus, d'une manière provisoire, et sous la réserve que ses conséquences soient vérifiées plus tard. Nous ne nous dissimulons pourtant pas que cette vérification sera plus difficile et plus lente à venir que celle qui, par la découverte de l'attraction universelle, est venue si rapidement confirmer d'une manière si éclatante les axiomes de la Mécanique Rationnelle. En sociologie, on ne dispose, du moins pour la moment, d'aucun ordre de phénomènes qui donnent la probabilité de la découverte d'une loi simple et générale comme celle de l'attraction Newtonienne; mais on ne peut pas prévoir ce que l'avenir réserve.

En examinant de plus près le cas qui nous occupe, nous y retrouvons les mêmes raisons qui ont conduit les fondateurs de la Dynamique Rationnelle à formuler leur principe de l'inertie de la matière. En effet, il est d'abord évident que, au moment où la force cesse subitement d'agir, le mouvement social de l'individu ne cesse pas immédiatement, mais se continue encore pendant un certain temps, plus ou moins long; car en Mécanique Sociale, pas plus qu'en Mécanique Rationnelle, il n'existe pas d'effet qui se produise d'une manière instantanée.

Il est encore facile d'admettre que ce mouvement continuera pendant un temps d'autant plus long, que les obstacles qui s'opposent à sa continuation seront moins nombreux et moins puissants. L'esprit est donc naturellement porté à admettre que, s'il était possible de faire disparaître entièrement ces obstacles, le mouvement pourrait se continuer indéfiniment. Nous faisons là la même induction que celle qui est suggérée par l'exemple de la bille sphérique qui roule sur une table horizontale d'autant plus loin, que la table est mieux polie et que la résistance de l'air est moindre.

En Sociologie, une vérification de cette sorte est tout aussi difficile, à cause de la brièveté de la vie, car l'énoncé du principe suppose que, le mouvement étant infini, la longueur de la vie est aussi infinie.

Nous pouvons enfin admettre que si, au moment où les forces ont cessé d'agir, le mouvement de l'individu était paralèlle à l'axe OX, il continuera à avoir lieu toujours parallèlement à cet axe; car aucune cause n'existant qui tende à faire sortir l'individu de cette ligne droite dans une direction plutôt que dans une autre, il n'y a pas de raison pour qu'il quitte cette ligne droite. Cela veut dire que le mouvement donné étant purement économique, il ne pourra pas prendre un caractère intellectuel ou moral, tant qu'aucune cause intellectuelle ou morale n'interviendra.

Un raisonnement analogue montrera que si les forces et le mouvement avaient été parallèles à OY ou à OZ, après la disparition de ces forces le mouvement aurait continué parallèlement à OY ou à OZ, avec une vitesse constante.

Considérons maintenant le cas général où la force a une direction quelconque MM'. On peut la décomposer en trois composantes MA, MB et MC, respectivement parallèles aux axes coordonnés, et appliquer pour chacune de ces composantes ce que nous venons de dire. Il en résultera que l'individu serait obligé, après la disparition de la force, à avoir trois mouvements uniformes et rectilignes, respectivement parallèles à OX, OY et OZ. Ces trois mouvements se composeront en un seul, uniforme et rectiligne, par la règle du parallalélipipède de composition.

En résumé, le principe de l'inertie pour les phénomènes sociologiques peut être formulé comme suit :

Si un individu est en état de repos social et s'il n'est sollicité par aucune force sociale, il restera indéfiniment en repos ; si un individu a un certain mouvement dû à certaines forces sociales, et que ces forces cessent subitement d'agir, l'individu continuera à avoir un mouvement social rectiligne et uniforme, qui se continuera indéfiniment tant que de nouvelles forces sociales n'interviendront, et qui sera dirigé sur la tangente à la trajectoire que l'individu suivait, menée au point ou il se trouvait au moment où les forces ont cessé d'agir.

Principe des mouvements relatifs. Soit un groupe d'individus, M, M′, M″, M‴ ......, occupant diverses positions sociales, et qui, sous l'action de certaines forces sociales communes ont tous des mouvements parallèles à OX et tels que tous les individus possèdent, à chaque moment, des vitesses de même grandeur, de même direction et de même sens. Le mouvement du groupe est alors un mouvement de translation, de sorte que sa forme reste invariable. Ce mouvement étant parallèle à OX, c'est un mouvement purement économique.

Supposons maintenant que les conditions des individus M′, M″, M‴..., restant les mêmes, nous appliquions au seul individu M une force économique P, donc parallèle à OX, que nous n'appliquons pas aux autres individus du groupe. Evidemment la forme du groupe sera modifiée, car l'individu M, sollicité par la force P qui n'agit pas sur les autres, prendra une certaine avance sur eux ; c'est son *mouvement relatif* par rapport à eux. Il représente le changement survenu dans l'état économique de M par rapport à celui de M′, M″, ... et produit par la nouvelle force P.

Nous admettrons que *ce mouvement relatif est le même que le mouvement absolu que l'individu M prendrait s'il était soumis à la seule force P, en partant de l'état de repos.*

C'est là l'énoncé du *principe des mouvements relatifs* appliqué aux phènomènes sociologiques et pour le cas particulier où les forces et les mouvements considérés sont exclusivement économiques. Mais l'énoncé serait identiquement le même si nous avions eu à faire avec des forces et des mouvements exclusivement intellectuels, ou exclusivement moraux.

Si maintenant nous considérons des mouvements et des forces quelconques, on peut les remplacer par leurs composantes parallèles aux axes de coordonnées, et les conclusions seront les mêmes, de sorte que l'énoncé précédent peut être considéré comme général.

Pour éclaircir cet énoncé par un exemple, suppossons qu'un groupe d'ouvriers, travaillant ensemble et menant exactement la même vie, soient occupés à l'exploitation d'une mine d'or, et que tous gagnent le même salaire ou découvrent la même quantité d'or par mois. Si l'un d'eux découvre pour sa part un filon plus riche que les autres, il deviendra plus riche que ses camarades ; et ce surplus de richesse sera le même que si, au moment de la découverte de son filon, il n'avait rien possédé du tout.

Dans cet exemple, l'énoncé du principe est évidemment exact, mais peut-être cette évidence serait moindre dans d'autres exemples. Aussi le principe des mouvements relatifs, comme celui de l'inertie, ne doit-il être considéré que comme un axiome dont l'exactitude reste à être prouvée par l'accord entre la théorie et l'observation.

Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Si un individu A exerce une action quelconque sur l'individu B, ce dernier exerce à son tour une action sur A qui est égale et contraire à la première.

Pour que cet énoncé ait un sens, nous devons d'abord donner une définition nécessaire.

Nous dirons que deux individus, A et B, sont identiques, alors que étant placés dans des conditions absolument identiques, ils exercent des actions égales dans des temps égaux.

Nous dirons encore que l'action de l'individu A est *n* fois plus grande que celle de B, alors que l'action de A est la même que celle de n individus identiques à B, agissant en même temps, sur la même ligne droite et dans le même sens.

On déduit de là la definition du rapport $\frac{m}{n}$ de l'action de deux individus.

Considérons maintenant deux individus identiques, A et B, mis en présence l'un de l'autre, et supposons que A soit capable d'exercer une action quelconque sur B. Par définition, B sera capable, lui aussi, d'exercer une action égale sur A. Ces deux actions seront contraires ; car si l'action de A tend à faire approcher B de A, celle de B tendra à faire approcher A de B, toujours en vertu de la définition. Il en serait de même si ces actions tendaient à faire éloigner les individus A et B l'un de l'autre.

Donc pour ce cas simple, le principe énoncé ne contient rien qui soit contraire à la raison.

Soient maintenant deux individus, A et B, dont les actions sont entre elles dans le rapport $\frac{m}{n}$. Cela veut dire que l'action de A pourrait être remplacée par celle de m individus C, identiques entre eux, et celle de B par l'action de n des mêmes individus C. Supposons que, pour la question qui nous occupe, nous remplacions A par m individus C et B par n des mêmes individus, et appelons p l'action qui s'exerce entre un individu C qui appartient au groupe A et un autre individu C du groupe B. Le groupe B étant composé de n individus C, subira n fois l'action p ; et comme ces actions s'exercent sur la même droite et dans le même sens, elles pourront être remplacées par une seule, de valeur np et agissant sur la même droite. Telle est l'action qui s'exerce entre l'individu C que nous avons pris dans le groupe A et l'ensemble du groupe B. Mais le groupe A contient m individus C ; et comme chacun d'eux subit la même action np de la part du groupe B, l'action totale exercée par ce dernier groupe sur l'ensemble de A sera m fois plus grande, soit mnp.

On arriverait un même résultat, si l'on cherchait, exactement de même, l'action du groupe A sur B.

Nous pouvons donc considérer le principe comme établi dans le cas général.

L'histoire fourmille d'exemples de ces actions et réactions entre individus ou groupes d'individus. On peut dire que la personnalité de chaque individu n'est, pour la plus grande part, que le résultat de l'action de la société dont il fait partie ; et à son tour, cette société subit l'effet de l'action que les individus exercent sur leur milieu ambiant, chacun dans la mesure de la valeur de sa personnalité. Cette action sera à peine sensible venant d'une personnalité faible, car elle se repartira sur une masse considérable, dont chaque individu s'en ressentira à peine ; mais il n'en sera pas de même avec une personnalité puissante, telle que un César, un Napoléon, un Guttemberg,[(112)] un Stephenson.[(113)]

Le même phénomène a lieu entre nations qui viennent en contact. Le peuple Romain imprime au monde ancien l'empreinte de sa puissante civilisation ; mais à son tour il subit l'influence des vaincus à tel point, que vers la fin on peut se demander si le nom d'Empire Romain convient encore à l'édifice social que les Romains ont élevé. Il en est de même pour les Chinois et leurs nombreux conquérants, pour les Espagnols et les Maures, pour les Turcs et les innombrables nationalités qu'ils ont assujetties à leur puissance. A chaque fois, l'effet subi par chaque élément de la nation considérée est d'autant plus grand, que la personnalité de cette nation est moins forte, soit au point de vue du nombre, soit à celui de l'énergie, ou de la civilisation, ou de n'importe quel autre facteur. L'effet est moins sensible sur les éléments de la nation la plus forte. La cause de cette différence est que la même somme d'action se repartit dans le premier cas sur une masse sociale plus considérable que dans le second.

* * *

Les trois principes que nous venons d'établir ont une importance capitale pour ce qui va suivre ; aussi convient-il d'insister encore sur leur signification.

Le raisonnement est intervenu dans une grande partie de la discussion qui précède ; cependant il ne faut pas se faire d'illusions et considérer ces principes comme suffisamment démontrés à l'aide du simple raisonnement. En effet, plus d'une fois nous avons fait des hypothèses que la seule force du raisonnement ne suffit pas à établir définitivement ; l'esprit éprouve même une certaine difficulté à en admettre quelques-uns. Pour ces raisons, les trois principes qui précèdent ne peuvent être considérés que comme des axiomes, qu'une observation prolongée et raisonnée pourra seule mettre hors de doute, puisque en sociologie l'expérimentation est impossible.

En attendant, on peut remarquer que rien dans l'énoncé de ces axiomes ne choque l'esprit, ni ne se présente comme une impossibilité ; et si, au premier abord, on éprouve une certaine mefiance à l'égard de tels énoncés formulés dans une science que l'on considère généralement comme échappant à toute loi précise, il ne faut pas oublier qu'au XVII-e siècle la situation de la Dynamique Rationnelle n'était pas différente ; ses axiomes étaient alors mis en doute autant que peuvent l'être aujourd'hui ceux de la Mécanique Sociale ; et il est indubitable que, sans la splendide vérification de la Mécanique Céleste, ils le seraient encore en grande partie même aujourd'hui ; mais les hésitations de quelques savants du temps et l'opposition des scholastiques n'ont pas empêché la constitution de la science.

3. *Dynamique Sociale de l'individu ; définitions.*

Ce que nous venons de dire montre qu'entre la Dynamique Sociale et la Dynamique Rationnelle il existe une analogie parfaite ; car non seulement les forces sociales sont représentées de la même manière que les forces mécaniques, mais aussi les axiomes qui servent comme base de la Dynamique Rationnelle se retrouvent en Sociologie.

Il suit de là que toute la série de raisonnements, de démonstrations et de propriétés qui, partant des trois axiomes mécaniques, constituent la Dynamique Rationnelle, pourront être établis exactment de la même manière en ce qui concerne les phénomènes du mouvement social.

Nous exposerons, dans ce qui suit, les propriétés qui sont d'une certaine utilité pour la science sociale, sans nous arrêter aux démonstrations, qui ne seront que la réproduction de celles que l'on fait en Mécanique Rationnelle.

* * *

L'équilibre suppose un état permanent, ou qui doit être permanent si aucune cause n'intervient pour le faire cesser. c'est pourquoi le temps ne figure pas dans les formules de l'équilibre ; car s'il y figurait, l'état du système varierait avec le temps, et ce ne serait plus un état permanent.

Il n'en est pas de même en Dynamique ; car, pour qu'un mouvement soit parfaitement connu, il faut que la position du mobile soit connue à chaque instant, ce qui exige que le temps figure dans les formules du mouvement. C'est là la différence essentielle entre la Statique et la Dynamique.

Le mouvement social d'un individu s'appellera *uniforme*, alors, que la longueur de l'arc décrit par l'individu dans l'unité de temps est constante. On appelle *vitesse* du mouvement uniforme l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou bien, ce qui dans ce cas revient au même, le rapport entre l'espace parcouru et le temps employé pour le parcourir.

Si l'on compte l'espace parcouru sur la trajectoire à partir du point fixe O, si A était la position du mobile au moment à partir duquel on compte le temps, c'est-à-dire *à l'origine du temps*, si a est la vitesse et b=OA *la valeur initiale* de x pour $t=o$, le mouvement uniforme est représenté par l'équation

Fig. 24.

$$x=at+b,$$

qui donne la position du mobile pour toutes les valeurs de t. Elle s'appelle *l'équation du mouvement*.

En vertu du principe de l'inertie, le mouvement uniforme et rectiligne est celui qu'aurait un individu qui, après avoir subi pendant quelque temps l'action de certaines forces sociales, verrait ces forces cesser subitement leur action, de sorte que l'individu ne serait plus soumis à aucune cause de mouvement autre que *l'implusion déjà acquise*.

* * *

Tout mouvement qui n'est pas uniforme s'appele un *mouvement varié*. Dans un pareil mouvement, l'espace parcouru pendant l'unité de temps n'étant plus constante, la définition que nous avons donnée de la vitesse n'aurait plus de sens. On la complète de la manière suivante : la vitesse du mobile à un moment donné est la limite, à ce moment, du rapport de l'espace parcouru au temps employé pour le parcourir, lorsque ce temps tend vers zéro. Cette définition s'exprime par la formule

$$v = \frac{dx}{dt},$$

où $\frac{dx}{dt}$ est la *dérivée* de l'espace x par rapport au temps t.

On peut *intégrer* cette équation, c'est-à-dire chercher *la fonction primitive* x dont la dérivée est v.

On a alors.

$$x = \int vdt + b.$$

C'est *l'équation finie* du mouvement.

Parmi les différentes sortes de mouvements variés, il convient de distinguer le mouvement rectiligne où la vitesse varie proportionnellement au temps, c'est-à-dire augmente ou diminue d'une quantité constante dans l'unité de temps. Si a est cette quantité et b la valeur initiale de v, l'équation

$$v = at + b$$

donnera l'expression générale de v dans le mouvement considéré. On appele ce mouvement *uniformément varié.*

La quantité constante a dont v varie dans l'unité de temps s'appele *l'accélération* du mouvement uniformément varié que nous considérons.

Si l'on intègre l'équation précédente, on trouve que l'équation finie du mouvement rectiligne uniformément varié est :

$$x = \frac{at^2}{2} + bt + c,$$

où c est une nouvelle constante.

On démontrera, comme en Mécanique Rationnelle, que si un individu est soumis à une force sociale, constante en grandeur et en direction, et qui agit dans la même direction que l'impulsion antérieure de l'individu, le mouvement que cette force imprimera à l'individu sera uniformément varié.

Pour donner un exemple simple, supposons un individu qu'un coup de fortune a rendu tout-à-coup propriétaire d'un immeuble dont le revenu, après avoir couvert tous ses besoins, lui permet de réaliser chaque année une économie constante, a. Le coup de fortune représente l'impulsion initiale, en vertu de laquelle la situation économique de l'individu s'améliore d'une manière constante, par les économies constantes qu'il réalise; c'est pour lui un mouvement économique uniforme, dont la vitesse constante est a.

Supposons maintenant que, au lieu d'entasser tout simplement chaque année ses économies a, il les place à intérêts simples. Il se créera par là une nouvelle source d'enrichissement, qui, au lieu d'agir une seule fois pour toutes, comme le coup de fortune initial, agira d'une manière constante et toujours dans le même sens. La conséquence sera que, si la première année les économies de notre propriétaire se composent du seul revenu a de sa propriété, dans la seconde année l'augmentation de sa fortune comprendra la partie a, dûe à sa propriété, et le revenu r des économies a de la première année; dans la troisième année, elle se composera de a et des intérêts $2\,r$ des revenus $2\,a$ des deux premières années; et ainsi de suite. L'expression générale de l'augmentation de sa fortune pour la $t^{\text{ième}}$ année sera

$$v = a + (t - 1)\ \ r = a - r + rt.$$

Comme cette expression de la vitesse v croît proportionnellement au temps t, le mouvement économique produit par la cause constante considérée est uniformément varié.

* * *

La définition de l'accéleration telle qu'elle a été donnée ci-dessus n'a plus aucun sens pour un mouvement varié quelconque, pour lequel la variation de la vitesse dans l'unité de temps ne serait plus constante. On généralise cette définition, en disant que l'accélération à un moment donné d'un mouvement varié quelconque est la limite du rapport de l'accroissement de la vitesse à celui du temps, lorsque ce dernier accroisement devient infiniment petit. C'est donc la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

4. *Unités de mesure; masse de l'individu.*

Dans les discussions qui précèdent, nous avons eu à considérer trois sortes de grandeurs : le temps, les longueurs et les forces.

La notion du temps n'a pas besoin d'être définie, et pour la mesurer on peut prendre comme unité n'importe quel intervalle de temps bien déterminé, tel que la seconde, l'heure ou l'année. Mais comme l'action des forces sociales ne se fait généralement sentir que dans un temps assez long, il conviendra de prendre comme unité de mesure, suivant les circonstances, le jour, l'année, et quelquefois même le siècle.

Comme longueurs, nous avons eu à considérer les coordonnées qui représentent la grandeur du mouvement social dans les trois directions, économique, intelelectuelle et morale. Comme ces trois sortes de grandeurs ne sont pas de même nature, il est nécessaire de choisir une unité de mesure distincte pour chacune d'entre elles. Ainsi, on pourrait estimer la grandeur des x d'après la valeur d'une fonction qui dépende en même temps de la fortune de l'individu, de son état physique et de toutes les autres circonstances qui concourent à son bien être économique. Pour les y, on prendrait en considération l'instruction, le degré d'intelligence, l'aptitude artistique et scientifique, etc. Pour les z, les critériums seraient la moralité de l'individu dans sa vie privée et publique, son respect des lois, son sens religieux, et pour une société, l'état de la criminalité, le nombre et l'importance des institutions de bienfaisance. La chose, assurément, ne sera pas aisée, et il restera beaucoup de marge pour la convention. Mais ces conventions une fois établies, à force d'étude et d'observations longues et patientes, on parviendra à trouver des moyens sûrs et précis de comparaison entre les grandeurs qui nous occupent.

Il en sera de même pour les forces sociales. On sera obligé de prendre une unité de mesure différente pour chacune des trois catégories de forces auxquelles on a à faire, en procédant de la même manière que pour les longueurs.

* * *

A côté des trois sortes de grandeurs que nous venons de considérer, une quatrième notion intervient dans l'étude du mouvement ; c'est *la masse.*

On remarque que si l'on applique la même force mécanique successivement à deux points matériels différents et pendant le même temps, généralement les mouvements communiqués à ces points ne sont pas les mêmes. Les choses se passent comme si ces points matériels opposaient des résistances différentes au mouvement que la force tend à leur imprimer. On dit alors que ces deux points n'ont pas la même masse, et on donne la définition des masses égales et de celles qui sont entre elles dans un certain rapport.

En Dynamique Rationnelle, la masse de chaque point matériel ainsi définie est une quantité rigoureusement constante.

On fait la même observation en Mécanique Sociale. On remarque que si une même force sociale agit successivement, pendant la même durée de temps, sur deux individus différents, elle ne leur imprime pas le même mouvement social. Nous dirons que ces deux individus n'ont pas la même masse, et plus l'effet produit par la force sera grand, plus la masse sera petite. On dira, au contraire, que leurs masses sont égales si ces mouvements sont identiques, et on tire facilement de là la définition des masses qui sont entre elles dans un rapport quelconque.

Mais ici un difficulté se présente.

Nous avons dit qu'en Dynamique Rationnelle la masse des points matériels est une quantité constante. Cela signifie que si k est le rapport des masses de deux points matériels à un certain moment et pour une certaine force, ce rapport aura toujours la même valeur, quelles que soient les forces qui agiraient sur les deux points considérés, et quel que soit le moment où l'on fait l'observation,

Il n'en est pas de même en Dynamique Sociale.

En effet, il est facile de remarquer que souvent, si un individu A subit l'action d'une force P avec plus d'intensité que l'individu B, c'est B qui subit avec plus d'intensité que A l'action d'une autre force P′ ; autrement dit, la masse de A a été plus petite que celle de B pour la force P, et elle a été plus grande pour P′. Ainsi un artiste est plus sensible qu'un marchand à une sollicitation de nature intellectuelle ; sa masse est plus petite ; c'est le contraire qui arrive, s'il s'agit d'une force économique. Donc la masse d'un individu n'est pas la même pour toutes les forces qui agissent sur lui.

Bien plus, elle n'est pas constante, en général, pas même pour une même force ; car le même individu subit avec plus d'intensité l'action de cette force à tel moment qu'à tel autre ; sa masse, par rapport à cette force, a varié dans l'intervalle. Ainsi un jeune homme éprouve plus fortement qu'un vieillard l'effet des instincts sexuels ; un homme reposé développe une activité intellectuelle plus facilement que le même homme fatigué. C'est comme si la masse de l'individu était affectée d'un coefficient fonction du temps.

On peut écarter cette difficulté de la manière suivante.

Il résulte d'abord de la définition donnée à la masse de l'individu que les forces sont proportionnelles aux masses auxquelles elles impriment des mouvements identiques. En effet, si l'on considère deux forces, P et P', de même grandeur, de même direction et de même sens, qui agissent sur deux individus en leur imprimant des mouvements identiques, les masses m et m' de ces individus sont égales, par définition. Si maintenant nous réunissons d'un côté les deux forces P, pour en former une seule 2P, et de l'autre les deux masses m et m' en une seule $2m$, le mouvement n'a pas changé. Donc si l'on double la force en même temps que la masse, le mouvement reste le même. Il en serait de même si la force et la masse étaient multipliées par n'importe quel autre nombre, k, autre que 2. Donc la proposition est démontrée.

Considérons maintenant un individu dont la masse soit m par rapport à une unité de masse choisie une fois pour toutes et pour une certaine force P ; et soit m' la masse de ce même individu pour une autre force P'. Si dans le second cas nous multiplions en même temps la masse m' et la force P' par le même coefficient $\frac{m}{m'}$, ce qui est permis d'après la propositions que nous venons de démontrer, la masse devient m et la force $\frac{m}{m'}$ P' ; autrement dit, l'individu de masse m se comportera sous l'action de la force $\frac{m}{m'}$ P' exactement de la même manière que l'individu de masse m' sous l'action de la froce P.

Supposons maintenant que la masse de l'individu varie d'un moment à l'autre par rapport à la même forces P. Cela revient à dire que sa masse contient un facteur qui est fonction du temps, et qu'elle peut être mise sous la forme $mf(t)$. Si nous divisons par $f(t)$, la masse devient m et la force $\frac{P}{f(t)}$. Nous avons donc pu ramener encore la masse à une valeur constante, en affectant la force d'un coefficent convenable.

Il sera donc toujours possible, dans ce qui va suivre, de considérer la masse de l'individu comme une quantité constante, en affectant d'un coefficient convenable chacune des forces qui lui sont appliquées.

La notion de masse étant ainsi précisée, il s'agit de choisir une unité de mesure correspondante. Mais les unités de temps, de longueur et de force étant déjà choisies, le choix de l'unité de masse n'est plus arbitraire ; car cette unité devra être nécessairement la masse qui sous l'action de l'unité de force, pendant l'unité de temps, prendra une accélération égale à l'unité de longueur. L'unité de masse ne saurait donc être établie que par une expérience.

5. *Equation du mouvement social de l'individu.*

Les notions précédentes une fois établies, elles permettent de trouver les équations du mouvement social de l'individu. Les démonstrations seront identiques à celle de la Dynamique Rationnelle.

Soit d'abord le cas où la force est constante en direction et où l'impulsion initiale de l'individu est dirigée sur la direction de la force. Le mouvement sera alors rectiligne, car toutes les causes de mouvement agissant sur la même droite, il n'y a pas de raison pour que le mobile s'en écarte, dans un sens ou dans l'autre.

Prenons sur cette droite AB un point fixe, A, comme origine des coordonnées ; soit C la position du mobile à l'origine du temps, c'est-a-dire au moment à partir duquel on compte le temps ; M la position du mobile au moment t, $a = AC$, $x = AM$. L'équation du mouvement est :

Fig. 25.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P,$$

où m est la masse de l'individu et P la force sociale qui agit sur lui, ou la résultante de ces forces, s'il y en a plusieurs. D'après l'hypothèse, P est dirigée sur la droite AM.

L'équation du mouvement est ainsi donnée sous sa forme *différentielle*, car $\frac{d^2x}{dt^2}$ est la *seconde dérivée* de l'espace parcouru par rapport au temps, qui s'obtient par la considération d'accroissements infiniment petits de x et de t.

Pour utiliser cette équation, il est nécessaire de l'*intégrer*, c'est-à-dire de la remplacer par une autre équation équivalente, mais qui ne contienne que des quantités finies. Cette intégration est généralement une opération très difficile, et elle est encore plus difificie quand il s'agit du mouvement curviligne d'un point, et surtout du mouvement général d'un système de points. Il est probable qu'en Mécanique Sociale ces difficultés seront encore plus grandes, car tout fait croire que l'expression analytique des forces P sera compliquée.

Si l'intégration peut être exécutée, l'équation prendra la forme,

$$x = f\ (f),$$

qui sera l'*équation finie* du mouvement. On en tire la vitesse, v, qui est la première dérivée de x par rapport au temps.

Si la force qui agit sur l'individu a une direction variable, ou si cette direction ne coïncide pas avec cele de l'impulsion initiale, la trajectoire sociale de l'individu sera une courbe, et le mouvement sera *curviligne*. Il sera alors représenté par les équations suivantes :

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = \mathrm{X},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt} = \mathrm{Z},$$

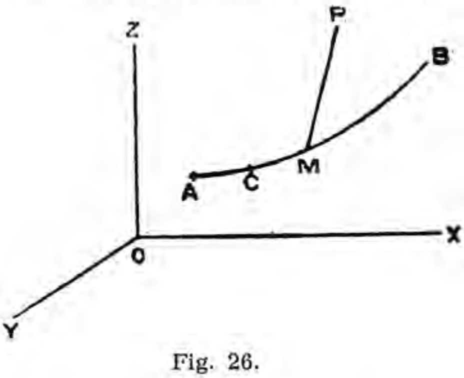

Fig. 26.

où x, y, z représentent les coordonnées variables de l'individu par rapport aux axes déjà choisis, et X, *R*, Z les projections sur OX, OY, OZ de la force P

Ces équations une fois intégrées, donnent la solution complète de la question du mouvement social d'un individu. Elles donnent *la loi du mouvement* de cet individu M, c'est-à-dire sa position sociale à un moment donné, quand on connaît l'expression de la force sociale qui le solicite et ses conditions initiales ; et réciproquement, on en peut tirer l'expression de la force P. capable de produire un mouvement social donné.

6. *Considérations sur le problème du mouvement social.*

La formation, ainsi que l'intégration des équations du mouvement social étant très difficiles, aucun des moyens qui peuvent faciliter l'étude d'un problème social n'est à dédaigner. Entre autres, la comparaison avec des problèmes mécaniques analogues peut donner quelquefois des indications précieuses sur l'allure générale, si ce n'est sur le détail d'un phénomène social. Nous en donnerons quelques exemples.

La chûte d'un corps lourd est un phénomène relativement simple, si parmi les forces qui le déterminent on ne prend en considération que la seule attraction de la terre sur le corps considéré. Le mouvement est alors uniformément varié, et il est tellement simple, que quelques expériences assez peu précises de Galilée ont suffi pour en établir les lois.

Mais il n'en est plus de même si on serre la question de plus près, et si on y introduit certains éléments moins apparents, mais qui ne sont pas nuls.

Si nous avons trouvé que le mouvement du corps qui tombe est uniformément varié, c'est que nous avons admis que la force qui détermine cette chûte est constante. Mais cela n'est vrai qu'à condition que la hauteur de chûte ne soit pas trop grande ; sinon, l'attraction de la terre variant en raison inverse du carré de la distance, elle cesserait de pouvoir être considérée comme constante, dès que la distance parcourue par le mobile dans sa chûte serait un peu grande par rapport à la longueur du rayon de la terre. Dès que le corps tombe d'une grande hauteur, on est obligé de tenir compte de la variation de l'attraction terrestre, et alors la loi du mouvement devient beaucoup plus compliquée.

Nous devons encore tenir compte de la résistance de l'air, que nous avons tout d'abord négligée. Cette résistance n'est pas nulle, et elle s'exerce suivant une loi qui n'est pas simple. Si nous en tenons compte, la loi de la chûte du corps devient encore plus compliquée.

Il en est de même pour le pendule. Si l'on suppose que son mouvement a lieu dans le vide, on démontre que ce mouvement se compose d'une suite indéfinie d'oscillations de même amplitude, à droite et à gauche de la verticale du point de suspension, et qui ont toutes lieu dans le même temps. Mais si l'on tient compte de la résistance de l'air, ces oscillations, tout en restant isochrones, deviennent de plus en plus petites.

Le mouvement des corps célestes est d'une complication en apparence inextricable ; mais la chose devient assez simple et claire si l'on introduit une classification dans les difficultés que le problème fait surgir.

Proposons-nous d'étudier, par exemple, le mouvement de la terre. Le problème complet doit tenir compte de l'attraction exercée sur elle par le soleil, la lune, toutes les planètes et tous les satellites du système solaire, sans compter celles des étoiles fixes, qui sont trop éloignées pour que leur action soit sensible. Il faut tenir compte aussi des attractions que tous ces corps exercent les uns sur les autres ; car ces attractions font changer leur place dans l'espace, et par conséquent aussi l'attraction exercée par eux sur la terre.

Si l'on aborde le problème dans toute sa complexité, sa sovution devient presque impossible. Mais on remarque que les diêerses attractions auxquelles on a affaire n'ont pas toutes la mme importance. L'attraction du soleil sur la terre est incomparablement la plus grande ; celle de la lune vient en seconde ligne ; celle des planètes est encore plus petite, et celle des satellites est presque insensible. L'influence des attractions réciproques de tous ces corps entre eux est aussi très peu considérable. La voie à suivre était indiquée par là. Nous tenons compte tout d'abord de la seule attraction du soleil, et nous trouvons que, dans cette hypothèse, la terre doit avoir le mouvement elliptique tel que Kepler (114) l'a défini. Nous introduisons ensuite l'action de la lune, et nous calculons les *perturbations* qu'elle apporte au mouvement déjà calculé. Viendront après celles qui sont produites par les planètes ; et ainsi de suite.

Dans tous ces exemples, la méthode suivie a été la même : on s'est attaché d'abord à la cause principale du phénomène, et puis on a complété et corrigé le résultat obtenu, en introduisant successivement, et dans leur ordre d'importance, les forces les moins considérables. Mais si dès le premier jour les moyens d'observation avaient été assez parfaits, et si Galilée et Kepler avait essayé de trouver la loi qui donne lieu aux mouvements réels, en tenant un compte exact des résultats de l'observation, il est hors de doute qu'ils n'y seraient jamais parvenus ; la complication extrême de ces mouvements s'y serait opposée.

Dans ce cas, le manque de précision des observations, en masquant les perturbations, a fait ressortir les caractères principaux du mouvement et a rendu possible la découverte de sa loi.

Voici un exemple d'un genre différent.

Un projectile lourd, lancé dans le vide avec une vitesse initiale oblique, devrait décrire une parabole à axe vertical. Mais les artilleurs savent que telle n'est pas la trajectoire réelle d'un boulet. C'est que la résistance de l'air est assez forte pour modifier considérablement cette trajectoire. Comme la question présente un grand intérêt pratique, on a cherché expérimentalement la loi de la résistance des milieux au mouvement des corps. On n'est pas parvenu à la découvrir ; mais on a trouvé que, pour les besoins de la pratique, on peut admettre que cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile si cette vitesse n'est pas trop grande ; au cube de la vitesse si elle est plus grande ; et ainsi de suite. C'est évidement une loi empirique ; mais, pour le moment, elle est suffisante.

La science sociologique est incontestablement moins avancée que la Mécanique Rationnelle, sous le rapport de la théorie. Elle ne dispose d'aucune loi bien établie, telle que la loi newtonienne ; l'expérimentation lui est interdite, et l'observation se réduit pour elle aux seules leçons de l'histoire, qui sont loin d'être suffisantes. Pour toutes ces raisons, en attendant le jour où ces difficultés seront surmontées, il faudra que la Sociologie se résigne à passer par le stage que la science du mouvement physique a fait ; qu'elle se contente, elle aussi, pendant quelque temps, d'expressions approchées pour les forces sociales, et, le jour où elle sera en état d'user du calcul, d'approximations successives.

7. Propriétés générales du mouvement social de l'individu.

On démontre en Dynamique Rationnelle certaines propriétés qui seront établies de la même manière en Dynamique Sociale.

L'équation

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{P}dt.$$

s'appelle *l'équation de la quantité de mouvement.*

Le produit mv de la masse par la vitesse d'un individu est sa *quantité* de mouvement ; Pdt, produit de la force par l'élément du temps, est *l'impulsion élémentaire de la force* ; et l'intégrale $\int_{t_0}^{t} \mathrm{P}dt$, effectuée entre les moments t_0 et t, est *l'impulsion totale* de la force dans cet intervalle de temps. L'équation exprime donc que *l'accroisement de la quantité de mouvement d'un individu pendant un intervalle de temps est égal à l'impulsion totale pendant le même intervalle de la force qui agit sur lui qui détermine son mouvement.*

On obtiendra aussi l'équation :

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp.$$

Le produit mv^2 de la masse par le carré de la vitesse est *la force vive* ou *l'énergie* de l'individu considéré ; le produit Pdp de la force P par la projection dp sur la direction de la force de l'arc infiniment petit ds parcouru par l'individu dans son mouvement social, est *le travail élémentaire* de cette force ; l'intégrale $\int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp$, effectuée entre les moments où les vitesses étaient v_0 et v et les arcs parcourus s_0 et s, est *le travail total* de la force dans cet intervalle.

Le théorème des forces vives s'énonce donc ainsi : *l'accroissement de la force vive ou de l'énergie d'un individu pendant un mouvement social est égal au double du travail total de la force qui agit sur lui pendant cet intervalle.*

Ce travail peut être positif ou négatif. Dans ce dernier cas, la force s'appelle *résistante*, et l'accroissement de la force vive devient aussi négatif. Donc une force résistante diminue la force vive ou l'énergie d'un individu.

Si plusieurs forces agissent en même temps sur l'individu, le travail total développé est égal à la somme algébrique des quantités de travail développées par chacune d'elles, soit à la différence des sommes des quantités de travail positif et négatif. Si cette dernière est la plus grande, il y aura diminution de l'énergie.

Si l'intégrale

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp$$

est nulle, on a

$$mv^2 = mv^2_0.$$

Par conséquent, l'énergie de l'individu reste constante tant qu'aucune force sociale n'agit sur lui, ou bien si la somme des quantités de travail des forces qui agissent sur lui est nulle. En ce cas, v est constant, c'est-à-dire le mouvement est uniforme. Ce résultat ne peut pas être considéré comme une démonstration du principe de l'inertie ; ce n'est que la conséquence d'une formule dont ce principe est la base.

8. *Equations du mouvement d'un corps social. Principe de d'Alembert.*

Un corps social est une réunion d'individus qui obéissent à leurs actions réciproques, ainsi qu'à certaines conditions, que nous avons nommées *liaisons*, et qui s'expriment tantôt par des équation, tantôt par des inégalités. Ces individus sont sujets en même temps à des forces sociales *extérieures*, c'est-à-dire qui n'émanent pas des individus mêmes qui composent le corps social.

S'il n'existe pas des liaisons, les individus se meuvent librement, sous la seule influence des forces sociales, intérieures et extérieures, qui les sollicitent.

Le mouvement d'un corps social résulte du mouvement que prend chacun des individus qui le composent, par l'effet des forces et des liaisons auxquelles ils sont assujettis.

Il peut arriver que le mouvement social ainsi produit soit tel, que les distances entre eux des individus qui le composent restent constantes pendant un temps plus ou moins long. La forme du corps social reste alors invariable pendant ce temps ; il se comporte comme un *corps solide.*

Ce cas est extrêmement rare, et plutôt impossible en Sociologie. Dans le cas général, la forme du corps social change sans cesse, et la comparaison qui lui convient le mieux est celle avec une masse fluide agitée sans cesse par des remous plus ou moins violents.

* * *

Le mouvement social, de même que le mouvement mécanique, satisfait à un principe très général, nommé *principe de d'Alembert,* qui sert à écrire les équations du mouvement d'un système social dans le cas le plus général.

Soit M un des individus qui composent le système social considéré et P la résultante des forces sociales, tant intérieures qu'extérieures au système, qui agissent sur lui. Cet individu, sous l'action de la force P et des liaisons du système, prendra un certain mouvement social. Mais il est possible de trouver une force Q telle, qu'elle imprime le même mouvement à cet individu supposé entièrement libre. La résultante R de la force P et de — Q, égale et directement oposée à Q, s'appelle *la force perdue* de M.

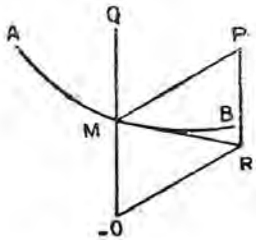

Fig. 27.

Le principe de d'Alembert s'énonce ainsi : *Toutes les forces perdues d'un corps social en mouvement se font équilibre, en vertu des liaisons qui lui sont imposées.*

Soient

$$\begin{array}{l} L_1\ (t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ldots) = 0 \\ L_2\ (t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_k\ (t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ldots) = 0 \end{array}$$

les liaisons imposée au système, où t représente le temps, et $x, y, z, x', \ldots$ les coordonnées sociales des individus qui composent le système.

Les équations du mouvement du système sont de la forme :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x} + \dots$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial y} + \dots$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial z} + \dots$$

X, Y, Z sont les composantes de la force P qui agit sur l'individu de masse m et de coordonées x, y, z ; $\frac{\partial L_1}{\partial x}, \frac{\partial L_1}{\partial y}, \dots$ sont les dérivées partielles des fonctions $L_1, L_2, \dots$ par rapport aux coordonnées ; $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont des facteurs qui s'éliminent par le calcul.

* * *

Dans toutes les questions de Dynamique Rationnelle, les équations du mouvement définissent des fonctions continues, en ce sens que la valeur de la fonction à un certain moment résulte des états de cette fonction aux moments antérieurs et détermine ses valeurs ultérieures. Comme les équations du mouvement social sont de même forme que celles de la Dynamique Rationnelle, nous pouvons conclure que le mouvement social est aussi un mouvement continu, ce qui confirme une proposition déjà énoncée.

9. *Propriétés génerales du mouvement des systèmes sociaux.*

L'intégration des équations du mouvement social présentera assurément des difficultés au moins aussi grandes que celles de la Dynamique Rationnelle. Aussi ne peut-on énoncer qu'un petit nombre de propositions générales, dont l'énonciation n'exige pas l'intégration préalable des équations, ni la connaissance de l'expression analytique des forces. Nous nous contenterons de ne mentionner que celles qui peuvent présenter quelque utilité dans la question qui nous occupe.

La premère est celle qui est connue sous le nom de *principe du mouvement du centre de gravité du système.* Il a lieu dans le cas où le système est libre et de forme invariable, et aussi lorsque les liaisons du système libre sont exprimées par des équations qui ne contiennent que les distances des points du système entre eux. Le premier cas ne se présente que très rarement en Sociologie, et seulement pour de petits intervalles de temps; le second n'est pas plus fréquent, car en général les relations qui existent entre les individus qui composent un corps social ne dépendent pas seulement de leurs distances sociales, mais sont aussi fonctions du climat, des conditions locales, de l'étendue et de la fertilité du sol, etc. Ce principe n'aura donc qu'une application très restreinte en Sociologie.

Son énoncé est le suivant : *Dans les cas ou le principe du mouvement du centre de gravité a lieu, ce centre se meut comme un simple point où toutes les forces appliquées au système seraient transportées parallèlement à elles-mêmes et qui aurait une masse égale à la masse totale du système.*

Dans le cas où le principe du mouvement du centre de gravité est applicable, si les forces sociales sont nulles ou se font équilibre sur le système solidifié, ce qui aurait lieu dans le cas particulier où le système ne serait soumis qu'aux actions et réactions des individus qui le composent et qui deux à deux sont égales et directement opposées, le centre de gravité du système est immobile, ou bien a un mouvement rectiligne et uniforme.

La seconde proposition est celle *des quantités de mouvement,* appliquée aux systèmes sociaux. Cette proposition est comprise dans l'équation

$$\sum mv - \sum mv_0 = \sum \int_{t_0}^{t} \mathrm{P}dt,$$

qui exprime que *l'accroissement de la somme des quantités de mouvement d'un corps social pendant un intervalle de temps est egal à la somme des impulsions totales pendant le même intervalle de toutes les forces qui agissent sur lui.*

Cette équation trè importante donne la raison pour laquelle, dans toute action sociale d'importance déterminée et réalisée dans un temps donné, si les masses mises en mouvement sont petites, il faut que leurs vitesses soient grandes, et réciproquement ; et aussi, si les forces sont petites, le temps d'action doit être long, et réciproquement.

La troisième proposition générale est celle du *principe des forces vives.* Elle est exprimée par l'équation

$$\sum mv^2 - \sum mv^2_0 = 2 \sum \int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp.$$

Dans cette équation, ainsi que dans celle qui précède, les lettres ont la même signification que dans les mêmes théorèmes appliqués à un seul individu. Le signe Σ signifie qu'il faut faire la somme algébrique des quantités placées à sa droite pour tout l'intervalle considéré. La derniere équation s'énonce donc ainsi : *La somme des accroissements, dans un intervalle de temps donné, de la force vive de tous les individus qui composent un corps social est égale au double de la somme des quantités de travail développées par toutes les forces sociales appliquées au système pendant le même intervalle.*

Cette propriété n'a lieu qu'à la condition que les équations de liaison du système ne contiennent pas le temps d'une manière explicite. Or il faut remarquer que généralement les individus qui forment un corps social ne sont soumis qu'à leurs influences réciproques et aux forces qui agissent sur le système, et de plus à des liaisons qui sont représentées par des lois, des coutumes et des nécessités sociales, dont le caractère est plus ou moins permanent. Donc le principe des forces vives sera assez souvent applicable, du moins pour des intervalles de temps pas trop longs.

* * *

Montrons par un exemple la manière dont ces principes peuvent servir.

L'île de Pâques est un rocher volcanique, d'une surface de 118 kilomètres carrés, dont la population actuelle ne dépasse pas 600 habitants, qt qui ne pourrait en aucun cas en nourrir plus de quatre ou cinq mille. De plus, elle est isolée au milieu de l'Océan Pacifique, à plus de 3300 kilomètres de la côte la plus rapprochée de l'Amérique, ainsi que de toute île ou archipel un peu important. Dans cette île on voit un grand nombre de rochers sculptés en forme de statues colossales, en basalte, de 6 à 7 mètres de haut, d'une exécution assez primitive, mais qui témoigne d'une science d'observation incontestable, et surtout de moyens d'exécution de beaucoup supérieurs à ceux dont pourrait disposer une population de quelques centaines d'individus. On y trouve aussi des restes de routes et de véritables hiéroglyphes.

La présence de ces monuments dans cette île perdue est la preuve évidente de l'existence d'une civilisation assez avancée, aujourd'hui disparue. Il faut admettre que le peuple qui les a exécutés avait mis de longs siècles pour y parvenir ; les Grecs ont eu besoin peut-être de milliers d'années pour que, partis de l'état sauvage, ils fussent arrivés à sculpter leurs petites statues archaïques du Louvre,[115] qui ne sont du reste que des imitations de l'art égyptien. Mais il faut admettre encore que ce peuple inconnu a été incomparablement plus nombreux que la poignée d'individus qui habitent l'île aujourd'hui.

En effet, l'équation des quantités de mouvement montre que plus les forces sociales mises en mouvement pour réaliser un certain travail social sont petites, plus le temps employé est long, et réciproquement. Et puisque l'étendue de l'île n'admet pas la possibilité de forces sociales considérables, il faut admettre que le temps nécessaire pour que l'exécution des statues de l'île de Pâques fût possible a dû être beaucoup plus long que celui qui a été nécessaire aux populations nombreuses de l'Assyrie, de l'Egypte et de l'Europe pour parvenir à exécuter des travaux analogues. C'est la raison pour laquelle jamais une civilisation n'a été le fruit du labeur d'un petit nombre d'individus ; elle représente une somme d'observation et d'expérience accumulées tellement grande, et les individus capables de faire augmenter le capital commun sont tellement rares, que ce ne sont que les longs espaces de temps et les groupes nombreux qui peuvent fournir les éléments d'une civilisation.

Il faut enfin remarquer que l'exécution matérielle de pareils monuments suppose l'existence d'outils d'un certain degré de puissance et de perfection, car leur absence exigerait un nombre d'autant plus grand de travailleurs. Mais les métaux manquent dans l'île de Pâques ; et du reste, au moment des premières expéditions européennes, les populations polynésiennes en étaient encore à l'âge de la pierre. Les artistes de l'île de Pâques n'ont pu donc disposer, pour exécuter leur colosses, que d'outils en pierre, dont on trouve même les restes. Leur mérite en est d'autant plus grand, mais cela prouve en même temps que le peuple auquel ils appartennaient était un peuple nombreux. Or comme l'île est très petite, deux seules hypothèses sont possibles.

La première est celle qu'une colonie appartenant à un peuple civilisé fût venue s'installer dans l'île. Il est difficile de l'admettre, à cause des énormes distances qui séparent l'île de toute autre terre un peu considérable. Le continent américain, qui en est le plus rapproché, et où s'épanouissait la civilisation péruvienne, est encore à plus de 3300 kilomètres de distance. D'ailleurs les Péruviens n'ont pas été un peuple navigateur; et l'eussent-ils été, il est impossible d'admettre qu'ils aient pu tenter une expédition pareille avec de simples canots à rames, qui auraient exigé plusieurs mois de navigation; l'expédition entière serait morte en route, de fatigue, de faim et de soif. L'hypothèse est d'autant moins admissible que, pour qu'une expédition partie d'Amérique eût pu découvrir un simple point perd au milieu de l'immensité de l'Ocean, visible à peine dans un rayon de 80 kilomètres, et dont rien ne faisait soupçonner l'existence, elle aurait dû avoir une chance extraordinaire.

Il ne reste donc à considérer que la seconde hypothèse, la seule plausible : celle que l'île de Pâques n'est que la dernière épave d'un continent, ou au moins d'un groupe d'îles assez considerables, habitées autrefois par une population nombreuse et civilisée, et qu'une terrible catastrophe, arrivée à une époque et par une cause inconnues, aurait fait disparaître. C'est à la géologie qu'il appartient de dire ce que cette hypothèse vaut.

10. *Principe de la conservation de l'energie.*

L'équation des forces vives peut être mise sous la forme :

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum mv^2_0 + \sum\int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp.$$

Si nous comptons le temps à partir du moment fixe et bien déterminé t_0, la quantité $\sum mv^2_0$ est constante, car elle représente la somme des forces vives que le système possédait à ce moment initial.

D'autre part, nous avons donné à l'expression $\int_{s_0}^{s} Pdp$ le nom de *travail total* ou d'*énergie totale* développée par les forces P pendant le mouvement considéré.

L'équation montre donc que, si la somme des forces vives du système reste constante, son energie totale restera aussi constante.

L'énergie totale d'un système en mouvement à un moment quelconque t se compose de deux parties.

La première est celle que le système possédait déjà au moment t_0 à partir duquel nous considérons le mouvement. Cette partie est due aux causes qui avaient produit le mouvement du système avant le moment t_0, et qui a donné ce que nous avons nommé *l'impulsion initiale*, que le système avait au moment t_0.

Cette *énergie initiale* est représentée dans l'équation par $\sum mv^2{}_0$.

La seconde partie de l'énergie que le système possede au moment t est celle que les forces P qui ont agi sur lui depuis le moment t_0 jusqu'à t ont développée.

Supposons maintenant que pendant tout l'intervalle de t_0 à t les forces P soient nulles ou se fassent équilibre. L'intégrale $\int_{s_0}^{s} Pdp$ est alors nulle, et l'équation des forces vives se réduit à

$$\sum mv^2 = \sum mv^2{}_0.$$

Elle signifie que la somme des forces vives du système reste constante pendant le mouvement considéré ; et comme, d'après l'équation précédente, la somme des forces vives est égale, à une constante près, à l'énergie totale du système, la dernière équation signifie aussi que *l'énergie totale du systeme reste constante pendant le mouvement considéré et égale à la valeur qu'elle avait au commencement de ce mouvement.*

Cette proposition est connue sous le nom de *principe de la conservation de l'énergie.*

L'exactitude de ce principe, longtemps admis sans contestation, a été remise en question à la suite de la découverte du radium et des autres métaux radioactifs. Ces métaux développent d'énormes quantités d'énergie sans l'intervention d'aucune force visible, ce qui prouverait que la somme d'énergie existant dans le monde peut être augmentée par cette cause nouvelle. D'autre part on cite des cas où l'énergie disparaît sans retour et sans se faire remplacer par une quantité égale d'énergie ou par une autre manifestation équivalente. Il suffit de citer la chaleur d'un corps chauffé qui se perd par radiation dans l'espace infini, après avoir traversé l'atmosphère, sans avoir produit aucun travail visible.

Nous croyons que ces objections ne sont pas fondées.

Une formule mathématique ne fait qu'exprimer une relation entre les quantités que l'on a considérés et que l'on a mis en oeuvre, pour ainsi dire, quand on a établi cette formule. Si l'on élargit sa portée et si l'on veut la faire parler dans des cas pour lesquels elle n'a pas été faite, elle risque de causer des déceptions.

Pour établir la formule des forces vives, on considère un système bien déterminé et fini, auguel sont appliquées des forces bien déterminées et agissant dans des conditions précises et connues. Dès que le champ s'élargit, il faut examiner dans quelles conditions la formule peut être maintenue.

Considérons un corps lourd qui tombe par la seule action de la pesanteur. Nous établissons la formule des forces vives, qui nous permet de calculer la quantité d'énergie à un moment quelconque. Mais si ce corps vient frapper la tête d'un pieu fiché en terre, une petite partie de l'énergie disponible à ce moment-là sert à enfoncer le pieu, tandis que la plus grande partie disparaît.

Si l'on se tient dans les limites primitives du problème, où l'on n'avait à faire qu'au seul corps qui tombait, il y a une perte d'énergie dont la formule ne peut pas rendre compte, puisqu'elle a été établie pour la seule partie du phénomène qui concernait la chûte du corps. Si nous faisons entrer le pieu aussi dans le cadre du problème, la formule, établie pour ce cas nouveau, sera plus exacte que la précédente, parce qu'elle tiendra compte de l'énergie dépensée pour enfoncer le pieu. Mais pour qu'elle soit tout-à-fait exacte, il faut faire entrer en ligne de compte la terre entière aussi, car une bonne partie de l'énergie du corps qui tombait a été employée pour produire les trépidations et les changements de position de molécules du massif terrestre jusqu'à une distance assez grande.

La chaleur que la terre perd par sa radiation dans l'espace représente de l'énergie perdue pour la terre. Si nous écrivons l'équation des forces vives pour la terre entière et pour toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur elle, l'équation dira bien que, dans telles circonstances et à telles conditions, la quantité d'énergie est constante ; mais ce résultat ne sera pas exact, car il ne tient pas compte de la chaleur perdue par rayonnement et de l'énergie qu'elle est capable de produire. Il n'en serait pas de même si nous suivions cette chaleur à travers l'éther et si, connaissant le genre d'énergie qu'elle est capable d'y développer, nous la faisions entrer dans notre formule.

Or nous ne sommes pas en droit d'affirmer que cette énergie n'existe pas. Nous ne savons rien sur la constitution intime de l'éther ; nous ne savons pas s'il n'est que de la matière dans un état de raréfaction qui dépasse l'imagination, ou bien un milieu d'une espèce à part. Mais nous savons que, quelle que soit sa constitution, il transmet l'énergie à des distances incalculables. C'est lui qui nous amène l'énergie du soleil, sa chaleur, sa lumière et ses effluves électriques et magnétiques ; c'est par lui que nous vient la lumière des étoiles placées à l'extrême limite de l'univers visible ; c'est encore lui, peut-être, l'agent mystérieux auquel est due la propagation, si ce n'est la production même, de l'attraction universelle. Si donc la chaleur rayonnée dans l'espace diminue l'énergie de la terre, cette énergie n'est pas perdue ; l'éther s'en charge, pour la transmettre à d'autres corps célestes ; et en attendant qu'elle y arrive, elle sert à produire les vibrations de l'éther qui, elles non plus, ne peuvent pas avoir lieu sans une cause qui les détermine.

Si d'un côté nous devons considérer de l'énergie qui se perd, il existe d'autre part de l'énergie qui prend naissance sous nos yeux, produite par les cops radioactfis. Mais de même que l'esprit se refuse à admettre sans examen l'anéantissement de l'énergie, il éprouve autant de difficulté à en admettre la création ; et il est plus naturel d'admettre que l'énergie dégagée par le radium n'est qu'une forme différente de celle à la quelle est due la cohésion et les autres forces moléculaires.

Considérée a ce point de vue, la question change d'aspect, et il ne semble plus que le principe de la conservation de l'énergie, élargi et bien compris, soit incompatible avec les nouvelles découvertes de la science.

Dans tous les cas, les principes de la Mécanique Rationnelle restent exacts et utiles dans les limites des questions courantes et du degré d'approximation avec lequel ils ont été démontrés.

* * *

Les considérations précédentes sont applicables aussi au principe des forces vives, tel que nous l'avons établi pour les phénomènes sociologiques. La consérvation de l'énergie d'un corps social existe, à condition de n'omettre aucune des formes sous lesquelles cette énergie peut être dépensée ou produite.

La quantité d'énergie dont un corps social dispose à un moment donné ne diminue pas en géneral par les actions et les réactions les uns sur les autres des individus qui le composent; car en vertu du troisième axiome de la Dinamique Sociale, ces actions et réactions sont deux par deux égales et directement opposées, de sorte que les énergies qu'elles développent se compensent deux par deux. Mais cette quantité d'énergie diminue lorsqu'elle est employée à produire un travail dont le corps social ne profite pas. Si, par exemple, l'énergie d'un certain nombre d'individus était employée à enfoncer des pieux en terre et que ces pieux restent non utilisés, la quantité d'énergie du corps social dont ces individus font partie a diminué d'autant, car ce travail a été fait en pure perte. Il n'en serait pas de même si les pieux servaient pour la construction d'un pont, parce que ce pont servira à faciliter les communications, et l'énergie dépensée sous une forme sera regagnée sous une autre. Il y aura même un accroissement d'énergie, si le pont sert à mettre en valeur certaines forces nouvelles, inactives auparavant, telles que l'exploitation d'une forêt ou d'une mine.

D'une manière générale, la quantité d'énergie des sociétés modernes va en augmentant. La création de ressources nouvelles, l'emploi plus judicieux et dans une proportion de plus en plus grande des forces naturelles, les inventions nouvelles, le respect de plus en plus grand pour la vie et les droits de l'homme, sont autant de causes de cette augmentation. La multiplication de la population en est une autre, car chaque nouvel individu représente la vie, c'est-à-dire la forme la plus économique de l'énergie sociale. Par contre, il y a diminution d'énergie dans certaines sociétés dont les forces sont déjà usées par la trop grande dépense d'énergie qu'elles ont faite dans les luttes pour la conservation de leur individualité, dans des entreprises dont le bénéfice, au point de vue de l'utilisation de l'énergie, a été plus petit que les pertes, ou dans des tiraillements sans utilité. La nécessité pour ces sociétés de dépenser plus d'énergie que la reserve dont elles disposent pour faire face aux exigences actuelles est une cause d'épuisement qui, si elle n'est pas écartée par la création de nouvelles sources d'énergie, amènera leur disparition inévitable.

11. *Principe de la moindre action.*

Le principe de la moindre action a lieu dans les mêmes cas que celui des forces vive. Son énoncé est le suivant :

La somme de toutes les intégrales dans un intervalle donné des produits de la force vive de chacun des individus qui composent le corps social par l'élément du temps est un minimum.

Cet énoncé signifie que, parmi tous les mouvemts par lesquels ou peut imaginer que le corps social passe d'une de ses positions à une autre, en satisfaisant aux équations de liaison qui lui sont imposées, c'est le mouvement effectif qu'il prend sous l'action des forces qui lui sont appliquées qui rend minimum l'expression

$$\sum \int_{t_0}^{t} mv^2\, dt.$$

Or mv^2 est la force vive de l'élément m ; le produit$m\ v^2dt$ signifie donc la force vive développée par cet elément pendant le temps infiniment petit dt. L'intégrale $\int_{t_0}^{t} mv^2dt$ est la force vive totale développée par ce même élément pendant l'intervalle de t_0 à t, et $\sum \int_{t_0}^{t} mv^2dt$ est la somme de ces forces vives développées par tous les éléments du système pendant le même temps. Le principe de la moindre action exprime donc que de tous les mouvements possibles d'un système social entre deux positions quelconques, en tenant compte de ses liaisons, c'est son mouvement effectif qui donne lieu à la plus petite dépense de force vive dans un temps donné. Autrement dit, chaque corps social soumis à certaines forces sociales et à certaines liaisons prend le mouvement qui exige la plus petite dépense possible de force vive.

Ce principe reste vrai, quel que soit l'intervalle de temps $t-t_0$, à condition que pendant ce temps ni les forces, ni les liaisons appliquées au système social considéré ne soient changées.

En réalité, dans les phénomènes sociaux, des changements continuels ont lieu ; mais chacun de ces changements demande un certain temps, plus ou moins long, pour se produire. Si donc nous divisons l'intervalle $t-t_0$ en un grand nombre de parties, nous pouvons admettre que pendant chacune de ces parties du temps les forces et les liaisons restent invariables ; donc le principe de la moindre action a lieu pour chacune d'elles ; donc il est vrai aussi pour l'intevalle total $t-t_0$.

* * *

En attendant que la science soit assez avancée pour permettre d'utilier le calcul, le principe de la moindre action, de même que ceux qui le précèdent, n'a qu'une importance théorique et philosophique ; mais cette importance est considérable. Il montre que, dans l'évolution des société humaines, il existe une loi qui les force à suivre, à chaque instant, le mouvement qui demande la plus petite dépense possible d'énergie. On peut la formuler d'une autre manière, en disant que chaque société se meut, à chaque instant, dans la direction où elle rencontre la moindre résistance.

Citons quelques exemples.

L'homme primitif, dépourvu de toute arme et de tout outil, a dû se contenter, pour sa nourriture, de fruits et de racines. Malgré la forme de sa dentition et les nécessités de son organisme, la force de ses ennemis naturels était trop grande pour qu'il risquât de l'affronter.

Il n'en fut plus de même quand il eut inventé ses premières armes. Pour lui ce fut alors moins dur de combattre les animaux sauvages que de souffrir de la faim. Il devint chasseur.

Plus tard, quand il eut réussi à domestiquer le boeuf et le mouton, il devint pasteur, parce que la vie pastorale était moins fatigante, moins exposée aux dangers et plus riche en moyens d'existence que celle du chasseur.

L'homme devint enfin agriculteur, car cette vie stable, tranquille, facile et abondante demandait une moindre dépense d'énergie dans un temps donné que la vie rude du pasteur.

Jamais une société, placée dans l'obligation de choisir entre deux voies, ne prendra celle qui demande la plus grande dépense d'énergie. Les Grecs anciens, entourés par la mer, furent navigateurs, commerçants et colonisateurs. Ils auraient pu aussi bien cultiver leurs vallées, essayer de s'étendre au nord, vers la Thessalie, la Macédoine et l'Epire, en délogeant les tribus barbares qui les occupaient, et devenir un peuple pasteur ou agriculteur. Ils ont préféré la vie maritime, qui incontestablement était pour eux celle qui présentait le moins d'obstacles et de difficultés.

De nos jours même, on voit l'expansion des peuples qui disposent d'un excès d'énergie se produire exclusivement du côté où elle rencontre la moindre résistance. Le fameux *Drang nach Osten* de la race germanique aurait pu devenir une réalité dans un temps où les nationalités de l'Orient européen, désorganisées et arriérées, présentaient une bien moindre résistance que les peuples occidentaux; aussi la Russie au temps d'Elisabeth et de Catherine II commençait-elle à devenir le point de mire de l'émigration allemande. Ce courant est enrayé aujourd'hui, et il prend la direction plus facile de l'Anatolie, de l'Afrique et du grand Océan; mai cette dernière voie sera fermée elle aussi le jour où le réveil de la race jaune y aura semé de trop grandes difficultés.

Le phénomène de l'envahissement des villes par les habitants des campagnes dans les pays industriel, celui de l'encombrement des carrières publiques là où les autres carrières manquent ou sont trop aléatoires, ne sont encore que les conséquences de la loi de la moindre action.

On doit considérer de pareils faits, prouvés par l'observation et déduits en même temps du principe de la moindre action, comme une confirmation de ce principe, et partent des trois axiomes dont il est la conséquence.

12. *Les quantités constantes dans le mouvement social.*

Les équations du mouvement social, de même que celles du mouvement mécanique, se présentent sous forme différentielle. Leur intégration sera une opération extrêmement difficile, et il est permis de croire que le jour où on pourra l'effectuer est encore très éloigné.

Cependant il a été possible de démontrer un certain nombre de propriétés, tirées de ces équations, sans qu'il soit besoin de les intégrer. Telles sont les propriétés sur le mouvement du centre de gravité, sur la quantité de mouvement, sur les forces vives, ainsi que le principe de la moindre action.

Une nouvelle propriété, très importante, de ces équations est la suivante : *Dans tout mouvement social, il existe toujours un certain nombre de fonctions qui restent constantes malgré les variations que le temps, les coordonnées et les forces subissent pendant ce mouvement.*

En effet, on démontre en calcul intégral que l'intégration d'une équantion différentielle d'ordre k introduit k constantes arbitraires; et que l'intégration d'un système de plusieurs équations différentielles introduit de même un mombre de constantes arbitraires égal à la somme des ordres des équations à intégrer.

Les valeurs de ces constantes aribtraires sont déterminées d'après les conditions initiales du problème. Dans le cas du mouvement, ces conditions initiales dépendent de la position qu'occupaient et de la vitesse que possédaient à un certain moment les points qui constituent le système.

Les équantions du mouvement social sont toutes des équations différentielles du second ordre, et si n est le nombre des individus qui composent le corps social considéré, leur nombre est de 3 n. Donc l'intégration de ces équations introduira $6n$ constantes arbitraires.

Le calcul intégral donne le moyen de formes $6n$ équations, dont la résolution permet de tirer la valeur de ces $6n$ constantes en fonction du temps, des coordonnées et des composantes des vitesses. Donc les fonctions qui expriment les valeurs de ces constantes restent constantes pendant le mouvement.

Le principe des forces vives fournit un exemple simple.

L'équation qui exprime cette propriété est :

$$\sum mv^2 - \sum mv^2_0 = 2\sum \int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp.$$

L'expression $\sum \int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp$ représente la somme des *intégrales définies* de la forme $\int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp$, prises entre les moments t_0 et t.

Si nous appelons I et I_0 les valeurs d'une de ces intégrales aux moments t et t_0, la valeur de l'intégrale définie $\int_{s_0}^{s} \mathrm{P}dp$ est $\mathrm{I}-\mathrm{I}_0$. Nous pouvons donc écrire l'équation des forces vives sous la forme :

$$\sum mv^2 - \sum mv^2_0 = 2\sum \mathrm{I} - 2\sum \mathrm{I}_0,$$

$$\text{ou} \quad \sum mv^2 - 2\sum \mathrm{I} = \sum mv^2_0 - 2\sum \mathrm{I}_0.$$

Dans cette équation $\sum mv^2_0$ et $\sum \mathrm{I}_0$ sont des quantités constantes, car elles représentent la somme des forces vives et la somme de quantités de travail du système au moment bien déterminé t_0, à partir duquel nous considérons le mouvement donné. La dernière équation signifie donc que, pendant toute la durée du mouvement considéré, la fonction

$$\sum mv^2 - 2\sum \mathrm{I}$$

reste constante.

Il existe un théorème, démontré par Poisson, qui, étant données deux constantes d'intégration d'un système d'équations différentielles, permet d'en trouver d'autres, sans faire de nouvelles intégrations ; mais le nombre des nouvelles constantes que l'on peut découvrir par cette méthode est généralement assez limité.

Quoi qu'il en soit, l'existence de fonctions qui restent invariables pendant un phénomène où nous sommes habitués à ne voir que du changement, est un fait dont l'importance philosophique n'échappera à personne.

13. *Remarque sur l'intégration des équations du mouvement social.*

Les équations différentielles du mouvement social que nous avons données ci-dessus sont tellement compliquées que, sauf de rares exceptions, elles n'auriaient qu'une utilité pratique très restreinte. Mais le problème social se présente dans des conditions spéciales, qui permettent d'agrandir dans une certaine mesure la possibilité d'utiliser ces formules.

Tout corps social est formé de certains groupes d'individus que la similitude de leurs conditions sociales rapproche et rend solidaires jusqu'à un certain point. Ainsi, les paysans ont des intérêts, une mentalité, un degré d'instruction, des aspirations, des sympathies et des antipathies qui plus ou moins leur sont communs. Cette circonstance est cause que l'action d'une force sociale extérieure s'exerce sur les individus qui composent le groupe paysan d'une manière plus égale que si ce groupe était composé d'individus appartenant à des catégories distinctes, telles que paysans et ouvriers d'usine, par exemple. Nous exprimerons cette observation en disant que, sous l'action d'une force sociale, la figure formée par le groupe paysan considéré à part tend à conserver sa forme, mieux que la figure formée par les groupes paysan et ouvrier. Il suit de là que, pendant un temps assez court pour que la forme de chacun des groupes qui composent le corps social ne change pas d'une manière sensible, ce corps pourra être considéré comme formé de plusieurs groupes de forme invariable. Or la Statique Sociale (ch. IV, 1) montre que toutes les force appliquées à un groupe social de forme invariable se composent en une résultante et un couple uniques.

Tout corps social peut donc, pendant un temps t assez court être considéré comme formé d'un certain nombre de groupes de forme invariable, dont chacun est soumis à une seule force sociale et à un seul couple de forces sociales.

Cette remarque est précieuse, parce que le changement de forme des groupes sociaux a lieu avec assez de lenteur pour qu'elle permette de considérer l'évolution d'un corps social comme une succession de figures formées par des groupes de formes invariables. On pourra donc, pour chacune des phases qui composent cette succession, réduire toutes les forces appliquées au système à un nombre de forces et de couples égal à celui des groupes qui composent le corps social. La simplification qui en résultera sera considérable, car on sera conduit, de cette façon, à considérer un nombre très réduit de groupes, au lieu d'un nombre très grand d'individus.

* * *

Soient donc A, B, C,... les groupes qui constituent le corps social considéré, momentanément invariables pendant le temps t. La figure formée par les groupes A, B, C,... change pendant le temps t; mais ce changement a lieu d'une manière continue. Si donc nous partageons le temps t en une infinité de parties infiniment petites, le changement de la forme du système A, B, C,... pendant une de ces parties du temps sera infiniment petite; autrement dit, le corps social formé par le système A, B, C,... pourra être considéré comme invariable pendant un temps infiniment petit. Or on démontre en Mécanique Rationnelle que le mouvement infinitésimal d'un solide se compose d'une translation infiniment petite, accompagnée d'une rotation infiniment petite. Donc *tout mouvement social peut être considéré comme formé d'une succesion continue de translations et de rotations infiniment petites.*

Cette propriété a une importance considérable, car les formules de la Mécanique Rationnelle font connaître à chaque instant le mouvement infinitésimal de translation d'une solide, ainsi que sa vitesse de rotation instantanée et la position de l'axe de rotation. On pourra donc prévoir,—à très courte échéance, il est vrai — le changement de position que le corps social subira à un moment donné, sous l'influence des forces sociales qui lui sont appliquées à ce moment.

14. *Diffusion des masses sociales.*

Dans un vase vide, versons une couche d'acide carbonique, jusqu'à une certaine hauteur, et au-dessus une couche d'air. Il y aura d'abord un plan de séparation entre les deux couches; mais au bout d'un certain temps, on remarque que, jusqu'à une certaine distance de ce plan, au-dessus et au-dessous, les deux gaz siont intimement mélangés ; ce qui prouve que l'acide carbonique, quoique plus lourd, s'est élevé dans la couche d'air, et réciproquement. On constate que la proportion dans le mélange du gaz ainsi deplacé varie avec le temps et avec la distance au plan de séparation, et on donne la formule

$$t = kd^2,$$

où t est le temps, d la distance et k un coefficient numérique qui varie avec la nature des gaz en présence. Cette formule donne le temps nécessaire pour avoir un même degré de concentration en acide carbonique à une distance donnée du plan de séparation.

Ce phénomène est connu en physique sous le nom de *diffusion des gaz*. On l'étudie expérimentalement, les procédés de la Mécanique Rationnelle, dans l'état actuel de la science, étant insuffisants pour le faire d'une manière analytique. Cependant nous avons cru devoir le rappeler ici, à cause de son analogie avec un phénomène social bien connu, et qui à cause de cette ressemblance pourrait être nommé la *diffusion sociale*.

Considérons deux masses sociales distinctes et juxtaposées. Après un certain temps, on remarque toujours un mélange qui se produit dans la proximité de la surface de séparation. La proportion dans laquelle l'élément nouveau pénètre dans l'ancien en un point donné dépend du temps, ainsi que de la distance à la surface de séparation.

Les exemples de ce phénomène ne manquent pas.

Si les masses considérées sont deux peuples séparés par une frontière, par des différences de langue, de lois et d'habitudes, il se forme toujours, le long de la frontière, à droite et à gauche, une zone ou tous les caractères d'un peuple se ressentent de ceux du peuple voisin : la langue s'infiltre d'éléments étrangers, des liens de sympathie ou de parenté s'établissent, les différences d'habitudes s'émoussent. Ces effets sont d'autant plus sensibles que la distance à la frontière est plus petite et que la durée du contact a été plus longue.

Il en est de même lorsque la conquête crée dans un pays une classe privilégiée. La masse assujettie réussit toujours à s'infiltrer à travers les mailles du réseau de prohibitions dont la masse conquérante a essayé de s'entourer ; elle s'introduit dans les places défendues, elle fait tomber l'une après l'autre les barrières qu'on lui oppose ; des mariages ont lieu, des relations personnelles s'établissent. D'autre part, l'énergie et l'esprit d'exclusivisme des conquérants s'usent à la longue, de sorte qu'un dernier effort, venu à temps, suffit le plus souvent pour faire disparaître les dernières traces de l'antique antagonisme. C'est l'histoire de la noblesse franque en France, de la conquête mantchoue en Chine, des Spartiates en Laconie ; et si aux Indes l'institution des castes dure encore, Dieu seul sait au prix de quels efforts ceux qui y sont intéressés parviennent à la maintenir.

La diffusion sociale est un phénomène très complexe, et il est douteux que la simple loi empirique de la diffusion des gaz y soit suffisante. En physique, les seuls éléments dont on ait à tenir compte sont les densités, peut-être aussi la composition chimique des deux gaz mis en présence. En Sociologie, le phénomène est beaucoup plus complexe. On doit tenir compte de l'importance du groupe social auquel les éléments diffusibles appartiennent ; plus cette importance est grande, plus la force d'attraction du groupe est considérable, moins ses éléments ont de facilité de se disperser dans une masse étrangère. Si les deux groupes mis en présence sont d'importance inégale, les éléments du groupe le plus faible seront plus diffusibles que les autres. On doit donc songer à un coefficient de diffusibilité, inversement proportionnel à une puissance positive de la masse du groupe auquel appartient l'élément considéré.

La découverte de certaines lois de la diffusion sociale semble difficile, mais non impossible.

15. *Le choc.*

Nous avons dit que les forces sociales, pour produire un effet sensible quelconque, exigent un temps qui ne soit pas nul ; il n'existe pas de *forces sociales instantanées* au véritable sens du mot. Cependant nous donnerons ce nom aux forces qui, agissant pendant un temps très court mais avec une intensité très grande, sont capables de produire un effet appréciable.

En Mécanique Rationnelle, on cite comme exemples de forces instantanées les explosions, les chocs. En Mécanique Sociale, on a les guerres entre nations et les guerres civiles, les grèves, qui ne sont qu'une des formes de la guerre civile, les révolutions, les épidémies, les catastrophes subites dues aux invasions, aux inondations, aux tremblements de terre, aux famines.

Tout corps social qui reçoit un choc éprouve une certaine déformation aux environs du point où le choc a eu lieu, déformation qui est due à la modification brusque des distances sociales entre les individus qui se trouvent, soit au point du choc soit à une certain distance de ce point. En effet, toute force sociale, instantanée ou non, qui agit sur un point d'une masse sociale, a pour effet de produire un changement dans la situation sociale des individus qu'elle atteint, ce qui chauge la figure du corps social au point considéré. Si la force est instantanée, cette déformation a lieu d'une manière brusque.

Mais le corps social ainsi déformé a toujours une tendance, plus ou moins marquée, de revenir à sa forme antérieure, tendance qui est l'effet des forces intérieures qui assurent la cohésion, plus ou moins grande, du corps. Nous donnerons à cette tendance le nom *d'élasticité*. On dira qu une masse sociale est *parfaitement élastique*, si après le choc elle reprend exactement la forme qu'elle avait avant ; et elle sera *entièrement dépourvue d'élasticité*, si après le choc la masse ne manifeste aucune tendance à reprendre sa forme antérieure.

Aucune masse sociale n'est parfaitement élastique ; aucune non plus n'est entièrement dépourvue d'élasticité. Ce sont les deux termes extrêmes d'une série, entre lesquels les sociétés réelles s'espacent, plus ou moins rapprochées de l'une ou de l'autre extrémité, suivant qu'elles ont une tendance plus ou moins marquée de revenir à leur forme primitive. Si une société reçoit un choc dont l'effet dépasse sa limite d'élasticité, la déformation produite par le choc reste permanente, et la société ne peut plus reprendre sa forme primitive ; cette forme sociale est détruite, ou au moins profondément altérée.

Les guerres puniques furent cause de la destruction de la société carthaginoise ; la révolution française ne renversa pas la société française, mais lui fit changer de forme ; enfin la guerre russo-japonaise ne modifia que pour un instant la forme sociale de la masse russe : le choc n'avait pas été assez fort pour dépasser la limite d'élasticité déterminée par l'énormité de la masse, par la ténacité des habitudes et par la force de résistance des éléments conservateurs de l'ancien état de choses.